

## THESIS / THÈSE

### MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

#### Développement analytique du problème des trois corps pour les systèmes extrasolaires résonants

Pardo y Cobo, Diego

*Award date:*  
2018

*Awarding institution:*  
Université de Namur

[Link to publication](#)

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



**UNIVERSITE DE NAMUR**

**Faculté des Sciences**

**DEVELOPPEMENT ANALYTIQUE DU PROBLEME DES TROIS CORPS  
POUR LES SYSTEMES EXTRASOLAIRES RESONANTS**

**Mémoire présenté pour l'obtention  
du grade académique de master en finalité spécialisée en perspectives professionnelles des  
mathématiques appliquées**

Diego PARDO Y COBO

Juin 2018



**UNIVERSITE DE NAMUR**

**Faculté des Sciences**

**DEVELOPPEMENT ANALYTIQUE DU PROBLEME DES TROIS CORPS POUR  
LES SYSTEMES EXTRASOLAIRES RESONANTS**

Promoteur : Anne-Sophie Libert

**Mémoire présenté pour l'obtention  
du grade académique de master en finalité spécialisée en perspectives professionnelles des  
mathématiques appliquées**

Diego PARDO Y COBO

Juin 2018

# Abstract

**Résumé :** Les excentricités importantes des systèmes extrasolaires exigent un développement alternatif pour le calcul de l'expression de l'inverse de la distance de la fonction perturbatrice du problème des trois corps. Ce mémoire étudie le développement en série d'excentricités et d'inclinaisons de [Abu-El-Ata & Chapront, 1975] qui prend en compte la variation du rapport des demi-grands axes. Cette variation est particulièrement importante pour les systèmes en résonance en moyen mouvement. Le but du mémoire est de valider un code existant implémentant ce développement et d'analyser l'intérêt de ce développement dans l'étude de l'évolution à long terme des systèmes extrasolaires résonants.

**Mots clés :** fonction perturbatrice, développement analytique, résonance, systèmes extrasolaires, problème des trois corps

**Abstract :** Due to the large eccentricities of the detected extrasolar systems, new analytical expansions are needed for the disturbing function of the three-body problem. The present work studies the high-order expansion in eccentricities and inclinations of [Abu-El-Ata & Chapront, 1975], which includes the variation of the semi-major axes ratio. This variation is important for the systems in mean motion resonance. This work aims to validate an homemade program of the expansion and to analyse the relevance of the analytical approach for the long-term evolution of resonant extrasolar systems.

**Keywords :** disturbing function, analytical expansion, resonance, extrasolar systems, three-body problem



# *Remerciements*

J'aimerais profiter de l'occasion qui m'est donnée de remercier tout ceux qui m'ont apporté leur aide de près ou de loin dans la réalisation de ce mémoire.

Je souhaite tout d'abord remercier tout particulièrement ma promotrice, Anne-Sophie Libert pour son soutien, ses conseils, sa disponibilité et plus globalement pour le temps qu'elle m'a accordé tout au long de ce travail.

J'aimerais également transmettre mes remerciements à Anne Lemaitre, André Hardy et Timoteo Carletti pour avoir accepté de faire parti du jury de ce mémoire.

Merci à tous mes camarades, plus particulièrement à mes amis de master 2, pour tous les bons moments et pour les encouragements au quotidien.

Merci à mes parents de m'avoir transmis leur curiosité et l'envie d'en apprendre toujours davantage.

Je remercie sincèrement tous mes proches, ma famille et Julie pour leur soutien indéfectible.

Je remercie enfin tous ceux que j'ai pu oublié et qui m'ont aidé directement ou indirectement dans l'écriture de ce manuscrit.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>10</b>
<b>1 Contexte</b>	<b>11</b>
1.1 Historique . . . . .	11
1.2 Méthodes de détection . . . . .	12
1.2.1 Méthode directe . . . . .	12
1.2.2 Méthodes indirectes . . . . .	12
1.3 Propriétés des exoplanètes . . . . .	14
1.3.1 Caractérisation par la masse . . . . .	14
1.3.2 Caractérisation par la distance à l'étoile et l'excentricité . . . .	15
1.4 Résonance en moyen mouvement . . . . .	16
1.5 Optique du mémoire . . . . .	17
<b>2 Rappels théoriques</b>	<b>18</b>
2.1 Le problème des deux corps . . . . .	18
2.1.1 Calcul de la trajectoire . . . . .	18
2.1.2 Formulation hamiltonienne du problème des deux corps . . . .	22
2.2 Le problème des trois corps . . . . .	23
2.2.1 Formulation hamiltonienne . . . . .	24
2.2.2 Développement en excentricités et inclinaisons . . . . .	26
2.3 Le manipulateur de séries namurois MSNam . . . . .	29
2.3.1 Comment sont codées les séries dans MSNam . . . . .	30
2.3.2 Initialisation et validation . . . . .	30
2.3.3 MStables . . . . .	31
<b>3 Développement analytique de l'inverse de la distance</b>	<b>32</b>
3.1 Considérations générales . . . . .	32
3.2 Développement en inclinaisons . . . . .	33
3.3 Développement en excentricités . . . . .	35
<b>4 Etude du code</b>	<b>40</b>
4.1 Uniformisation des notations . . . . .	40
4.2 Lien entre l'article [Abu-El-Ata & Chapront, 1975] et le programme force-fonction . . . . .	40
4.2.1 Expression de [Abu-El-Ata & Chapront, 1975] . . . . .	40
4.2.2 Expression du READ_ME . . . . .	41



4.2.3	Comparaison entre les deux expressions . . . . .	42
4.3	Organigramme . . . . .	43
4.4	Initialisation des variables . . . . .	45
4.5	Le programme force-fonction . . . . .	46
4.5.1	Arguments en entrée . . . . .	46
4.5.2	Validation . . . . .	47
4.5.3	Détermination de $\alpha$ . . . . .	48
4.5.4	Détermination de <i>orddif</i> . . . . .	48
4.5.5	Développement en inclinaisons de la perturbation directe . . .	49
4.5.6	Développement en excentricités . . . . .	51
4.5.7	Calcul de $(\frac{ra'}{r'a}) \cos(l - l')$ et de $(\frac{ra'}{r'a}) \sin(l - l')$ . . . . .	52
4.5.8	Calcul de $h$ . . . . .	52
4.5.9	Calcul de la partie indirecte . . . . .	52
4.5.10	Analyse des boucles . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Premières applications</b>	<b>63</b>
5.1	Les systèmes HD-108874 et HD-60532 . . . . .	63
5.2	Equations hamiltoniennes . . . . .	65
5.3	Résultats . . . . .	66
5.4	Limites du développement et perspectives . . . . .	68
	<b>Conclusion</b>	<b>69</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>71</b>
<b>A</b>	<b>Read_me du programme force-fonction</b>	<b>74</b>



# Introduction

Les exoplanètes sont un domaine scientifique dont l'intérêt ne cesse de croître. En effet, chaque année plusieurs dizaines de nouvelles exoplanètes sont découvertes grâce à différentes méthodes de détection. Une des particularités des planètes extrasolaires est leur grande excentricité. En effet, les orbites des exoplanètes sont plus elliptiques que celles des planètes qui gravitent autour du Soleil. Cela implique que les développements classiques, qui peuvent être employés afin de décrire l'évolution de notre système planétaire, sont inadaptés pour les systèmes extrasolaires. Un développement alternatif est proposé dans l'article [Abu-El-Ata & Chapront, 1975]. Cet article propose une généralisation du développement de Laplace-Lagrange. Dans ce mémoire nous nous intéresserons au cas des systèmes en résonance en moyen mouvement et analyserons l'intérêt de ce développement dans l'étude de la dynamique de tels systèmes.

Dans le premier chapitre, nous poserons le contexte du mémoire en introduisant les exoplanètes, les méthodes permettant de les détecter ainsi qu'en discutant de l'optique de ce mémoire.

Le deuxième chapitre sera consacré à une série de rappels théoriques concernant le problème des deux corps et le problème des trois corps. Il introduira également le manipulateur de séries MSNam.

Dans le troisième chapitre nous expliciterons et développerons en profondeur les expressions de l'article [Abu-El-Ata & Chapront, 1975], tout en mettant en évidence l'originalité de ce développement par rapport à ceux utilisés habituellement.

Le quatrième chapitre traitera du programme force-fonction écrit par Jacques Henrard et mettra en lien le développement réalisé dans l'article et le code de ce programme avec pour objectif de le valider.

Enfin dans le cinquième et dernier chapitre, nous utiliserons le programme validé pour étudier l'évolution séculaire de deux systèmes extrasolaires résonants et comparerons les résultats avec ceux d'un développement classique dans le but de mettre en évidence de potentielles améliorations.

# Chapitre 1

## Contexte

Depuis leur découverte en 1992 [Wolszczan et Frail, 1992], les exoplanètes, ou planètes en orbite autour d'autres étoiles que le Soleil, ne cessent de fasciner le grand public. La recherche dans ce domaine est en plein essor et devient de plus en plus précise et efficace. L'intérêt de l'étude des exoplanètes réside dans la compréhension de notre propre système planétaire, de sa formation et de son caractère unique. Elles nous offrent un point de comparaison, nous permettent de confronter nos théories à d'autres systèmes planétaires que le nôtre afin de pouvoir en tester la validité. Un autre intérêt évident est la possibilité de trouver d'autres mondes abritant, ou capables d'abriter la vie, de découvrir des planètes semblables à la Terre et disposant des multiples conditions qui nous semblent nécessaires au développement d'êtres vivants. À ces multiples titres, les exoplanètes sont fascinantes et poussent différentes disciplines scientifiques à développer de nouveaux outils.

### 1.1 Historique

Bien que leur existence fut pressentie depuis longtemps par la communauté scientifique, les moyens technologiques de l'époque rendaient leur détection ardue. La première détection d'une exoplanète eut lieu en 1992 lorsque les astrophysiciens Aleksander Wolszczan et Dale Frail ont découvert trois planètes autour du pulsar PSR1257 + 12 [Wolszczan et Frail, 1992]. En 1995, Michel Mayor et Didier Queloz ont découvert la première exoplanète autour d'une étoile de la séquence principale, 51 Pegasi [Mayor et Queloz, 1995]. Cette planète est nommée 51 Pegasi b et a une masse proche de la moitié de celle de Jupiter. À l'heure où ces lignes sont écrites, on recense 3 725 exoplanètes confirmées et 4 496 planètes candidates dans 2 778 systèmes planétaires selon [Nasa Exoplanet].

Ces découvertes ont mené à une réflexion quant à la signification du terme "planète". En 2006 s'est tenue à Prague la 26e assemblée générale de l'Union Astronomique Internationale. Un des principaux objectifs était de donner une définition précise d'une planète. Les astronomes ont convenu qu'une planète devait orbiter autour du Soleil, posséder une masse suffisante pour que sa gravité la maintienne en équilibre hydrostatique, sous une forme presque sphérique, et avoir éliminé tout corps susceptible de se déplacer dans son voisinage. Cette définition reste valable pour les exoplanètes, à

la différence qu'elles orbitent autour d'une autre étoile que le Soleil.

## 1.2 Méthodes de détection

Découvrir des exoplanètes a longtemps été une tâche particulièrement difficile de par leur petite taille et surtout du peu de luminosité qu'elles réfléchissent par rapport aux étoiles autour desquelles elles orbitent. Cependant plusieurs solutions existent et ont démontré leur efficacité.

### 1.2.1 Méthode directe

#### Imagerie directe

Il s'agit de la méthode la plus intuitive : essayer d'observer la lueur d'une exoplanète à côté de celle de son étoile. C'est une méthode de détection relativement ardue en raison de la faible lueur des planètes vis-à-vis de l'éclat de leur étoile à une si proche distance. Une façon de procéder est de travailler avec les infrarouges. En effet, alors que le rapport de lumière visible entre une étoile et une planète de la taille de Jupiter est d'un millionième, le rapport de leur lumière infrarouge n'est que de quelques millièmes. Une autre façon de procéder est la coronagraphie dont le principe est de masquer le centre lumineux de l'étoile afin de mieux distinguer la planète orbitant autour d'elle. L'intérêt de l'imagerie directe est qu'il s'agit de la seule méthode permettant de jauger certains paramètres physiques tels que la quantité d'eau sur la planète. L'imagerie directe a permis d'identifier ou confirmer 93 exoplanètes [Nasa Exoplanet].

### 1.2.2 Méthodes indirectes

Il s'agit de méthodes qui se concentrent sur l'effet que peut avoir une exoplanète sur son étoile afin de la détecter.

#### Vitesses radiales

Cette méthode était la plus utilisée initialement, la plupart des premières exoplanètes ayant été découvertes grâce à elle. Le principe repose sur le fait que l'étoile va osciller légèrement sous l'effet de l'exoplanète. Par l'effet Doppler, nous savons que lorsque l'étoile s'approche de nous, elle apparaîtra plus bleue, tandis qu'elle nous semblera plus rouge lorsqu'elle s'éloignera. En étudiant le spectre de l'étoile, il est possible de déterminer si un corps orbite autour de l'étoile.

Un des problèmes majeurs de cette méthode est qu'elle ne peut donner qu'une borne minimum de la masse d'une planète, ce qui peut poser problème lorsque l'on veut distinguer une planète d'une petite étoile. Il peut également y avoir des problèmes si le plan orbital de l'étoile est perpendiculaire à notre ligne de visée, puisque dans ce cas les variations de l'étoile ne pourront être détectées. Enfin, un dernier inconvénient de cette méthode est qu'elle favorise la détection de planètes peu adaptées à la vie. En effet elle détecte surtout des planètes assez massives, semblables à Jupiter, et donc

peu propices à accueillir la vie. À l'heure de l'écriture de ces lignes, 751 exoplanètes ont été découvertes par cette méthode [Nasa Exoplanet].

### **Transits**

C'est à cette méthode que l'on doit actuellement le plus de découvertes d'exoplanètes. Elle se base sur le fait que lorsqu'une exoplanète passe entre son étoile et la Terre, nous observons une légère baisse de la luminosité apparente de l'étoile.

L'avantage de cette méthode par rapport à la précédente est qu'elle permet d'estimer avec précision la taille de la planète. Par contre, elle ne peut révéler que les planètes passant entre la Terre et l'étoile, de taille suffisante pour causer une baisse significative de luminosité apparente. Il s'agit de la méthode utilisée par les missions spatiales Corot et Kepler. Actuellement on recense 2811 exoplanètes trouvées par cette méthode [Nasa Exoplanet].

### **Microlentilles gravitationnelles**

Cette méthode se base sur le principe de la relativité générale. Prenons une étoile très lointaine qui s'alignerait avec une autre étoile autour de laquelle orbite une planète et avec la Terre. La lumière de l'étoile lointaine serait courbée par l'étoile plus proche et par l'exoplanète, il s'agit d'un effet de microlentille. La lumière va ainsi être amplifiée lors du passage de l'étoile.

L'avantage de cette méthode est qu'elle permet d'observer des exoplanètes même petites, froides ou éloignées et que nous pouvons déterminer leur masse et leur position par rapport à l'étoile. Par contre, le principal inconvénient est que ce phénomène ne se produit qu'une seule fois. Une confirmation de l'observation est donc impossible. Actuellement les microlentilles gravitationnelles nous ont indiqué 74 exoplanètes [ESO, 2017].

### **Chronométrie**

Il s'agit de la méthode utilisée pour détecter les toutes premières exoplanètes autour des pulsars. Un pulsar est une étoile à neutrons émettant des impulsions particulièrement constantes. La présence d'une exoplanète perturbe l'émission de ces signaux et donc révèle sa présence. Actuellement, 29 exoplanètes ont été découvertes autour des pulsars [Nasa Exoplanet].

La figure 1.1 contient l'histogramme cumulatif du nombre d'exoplanètes découvertes par année via chacune des méthodes qui viennent d'être présentées.

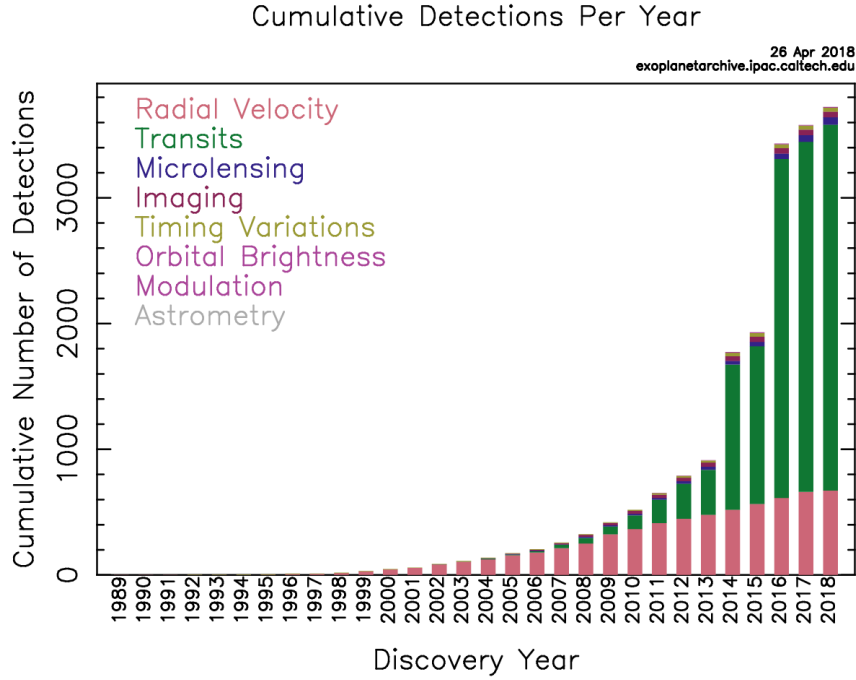


FIGURE 1.1 – Histogramme cumulatif du nombre d’exoplanètes découvertes par année en fonction de la méthode de détection utilisée. Source : [Nasa Exoplanet Archive]

## 1.3 Propriétés des exoplanètes

Nous pouvons analyser plus en détails les propriétés des planètes extrasolaires détectées. Principalement, nous nous intéressons ici à la masse (ou rayon) de la planète, à la température à sa surface (ou distance à l’étoile) et à l’excentricité de son orbite. Malheureusement, aucune des techniques connues ne permet de mesurer tous ces paramètres avec précision. Lorsque c’est possible, il est donc préférable d’observer une même exoplanète via plusieurs techniques.

### 1.3.1 Caractérisation par la masse

La masse (ou le rayon) est importante pour décider s’il s’agit d’une planète tellurique ou non. C’est un paramètre difficile à mesurer au moyen des techniques actuelles. En effet celle des vitesses radiales ne nous en donne qu’une borne inférieure tandis que pour la méthode des transits la masse est déduite d’autres grandeurs (principalement le rayon) et dépend donc des hypothèses faites. La figure 1.2 contient l’histogramme du nombre d’exoplanètes en fonction de leur masse exprimée en masses terrestres. Elle permet donc d’observer la répartition des planètes découvertes en planètes telluriques (masse inférieure ou proche de celle de la Terre) et en planètes gazeuses (masses proches de celle de Jupiter, soit 300 fois environ celle de la Terre).

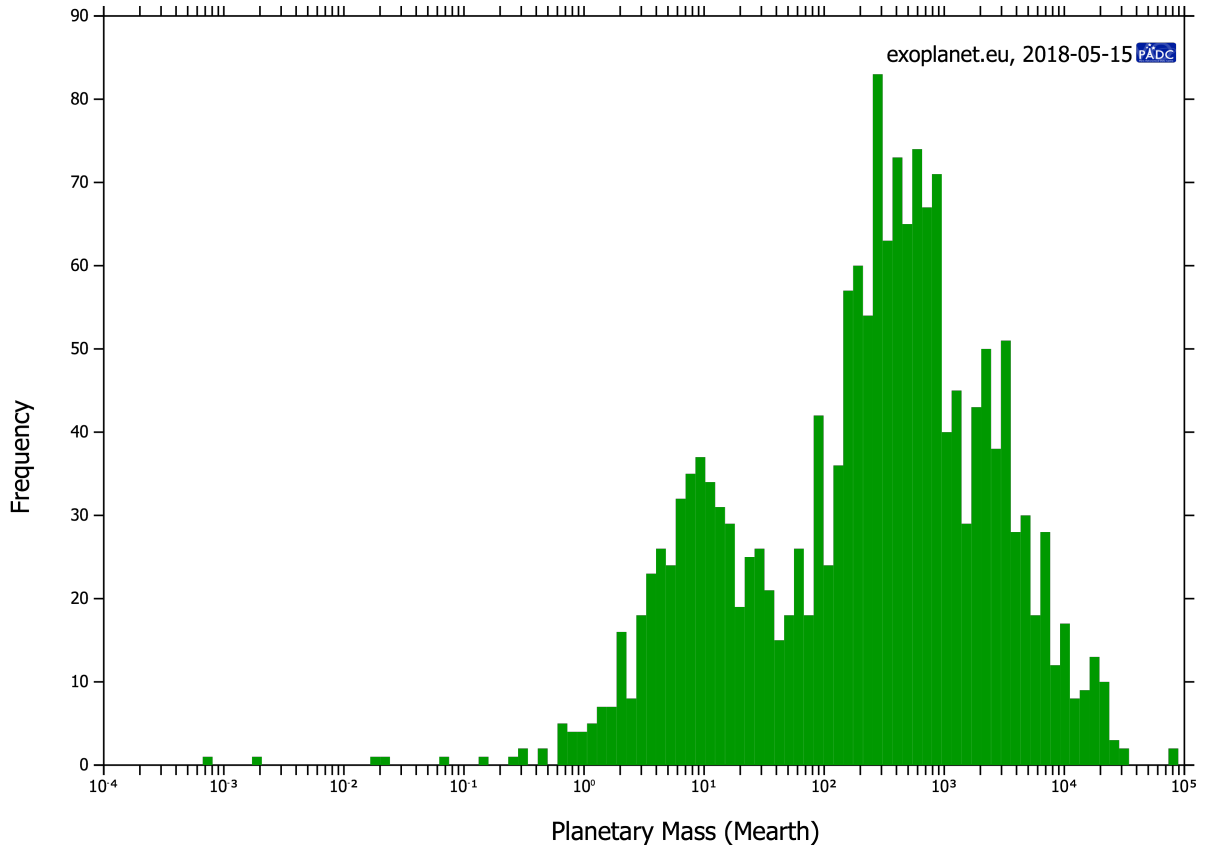


FIGURE 1.2 – Histogramme du nombre d’exoplanètes en fonction de leur masse en masses terrestres (échelle logarithmique). Source : [The Extrasolar Planets Encyclopaedia]

### 1.3.2 Caractérisation par la distance à l’étoile et l’excentricité

À nouveau, les techniques de détection actuelles ne permettent pas de déterminer la température à la surface d’une exoplanète. Celle-ci est donc souvent déduite à partir de la distance entre une planète et son étoile ainsi que des propriétés de celle-ci. Comme indiqué à la figure 1.3, les planètes détectées sont généralement proches de leur étoile, avec des périodes de révolution de seulement quelques jours pour certaines. L’existence de telle planètes est surprenante et nécessite de nouvelles théories pour expliquer leur formation. Il est à noter que peu de planètes sont découvertes à une dizaine d’unités astronomiques de leur étoile, ce qui pourrait provenir du biais des méthodes de détection actuelles pour les planètes proches de leur étoile.

De plus, contrairement au Système solaire, beaucoup d’exoplanètes se meuvent sur une orbite excentrique et non circulaire. L’excentricité est un paramètre compris entre 0 et 1 définissant la forme des orbites. Lorsque l’excentricité vaut 0, nous sommes



dans le cas d'une orbite circulaire. Plus nous nous en éloignons, plus l'orbite devient elliptique. Dans le cas de la Terre, son excentricité vaut 0,016. Cependant, comme montré à la figure 1.3, la majorité des exoplanètes ont été détectées sur une orbite excentrique.

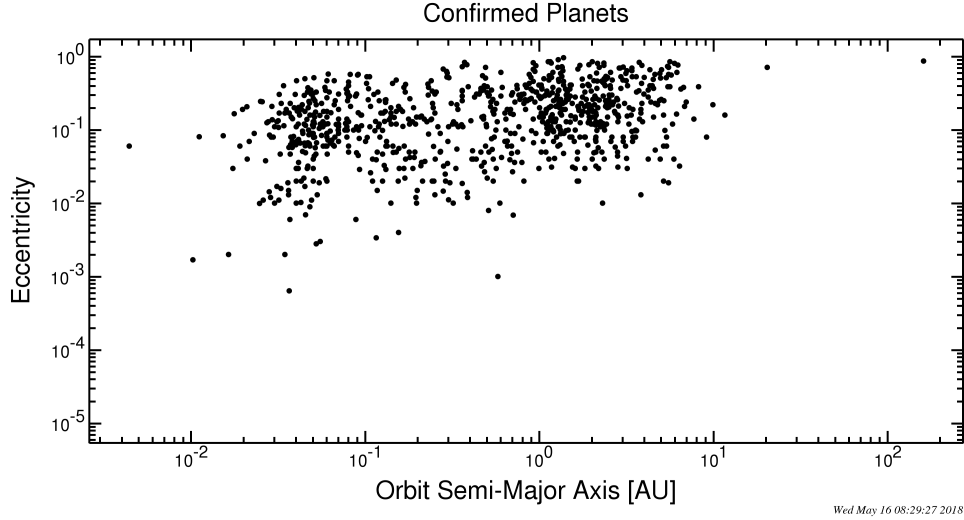


FIGURE 1.3 – Nuage de points de l'excentricité des exoplanètes en fonction de leur demi-grand axe. Source : <http://exoplanet.eu>

## 1.4 Résonance en moyen mouvement

Evoquons à présent le type de résonance qui nous intéressera dans ce travail, la résonance en moyen mouvement. En dynamique céleste le moyen mouvement est la vitesse angulaire moyenne d'un corps effectuant une révolution complète sur une orbite de demi-grand axe donné. On dit que deux corps sont dans le cas d'une résonance en moyen mouvement lorsque le rapport des moyens mouvements des deux corps en interaction est proche d'un rapport  $\frac{p}{q}$ , où  $p$  et  $q$  sont entiers, c'est-à-dire lorsque ce rapport est rationnel. Par exemple Io et Europe sont en résonance en moyen mouvement 2 : 1, Io effectue deux révolutions autour de Jupiter pendant qu'Europe n'en effectue qu'une.

Un exemple d'exoplanètes découvertes en résonance en moyen mouvement est celui de deux planètes du système Gliese 876. [Marcy et al, 2001] ont découvert que deux planètes du système (GJ 876 b et GJ 876 c) sont en résonance 2 : 1. Contrairement aux planètes du Système solaire qui ont des orbites quasi-circulaires, les excentricités de ces deux exoplanètes sont approximativement de 0.12 et 0.27.

Les périodes des deux planètes ont été estimées dans [Marcy et al, 2001] à 61.0 et 31.0 jours. Nous sommes bien dans le cas d'une résonance en moyen mouvement de type 2 : 1. Par la suite, il sera découvert qu'en réalité trois planètes de ce système

(GJ 876 c, d, e) sont en résonance en moyen mouvement de type 4 : 2 : 1 (résonance de Laplace) avec des révolutions respectives de  $30.0081 \pm 0.008$ ,  $61.1166 \pm 0.0086$  et  $124.26 \pm 0.70$  jours.

## 1.5 Optique du mémoire

Dans ce mémoire, il sera question des systèmes extrasolaires en configuration résonante qui possèdent des orbites plus excentriques que dans le Système solaire. Nous aborderons leur dynamique au moyen d’une approche analytique a contrario des méthodes numériques ou semi-numériques utilisées plus couramment. Dans le cadre du problème des trois corps, nous développerons l’Hamiltonien du problème des trois corps en série des excentricités et des inclinaisons. La principale difficulté dans cette tâche sera de calculer l’expression de l’inverse de la distance présente dans la fonction perturbatrice. À cette fin, nous nous baserons sur l’article [Abu-El-Ata & Chapront, 1975] qui, contrairement à l’approche traditionnelle, prend en compte la variation du rapport des demi-grands axes due à la résonance. Ce développement se base sur la méthode des coefficients de Laplace. Afin de manipuler ces séries, nous utiliserons le manipulateur de séries MSNam, créé par Jacques Henrard pour les séries de Poisson.

Concernant le déroulement du mémoire, dans un premier temps il nous faudra comprendre le fonctionnement du manipulateur MSNam et savoir utiliser sa librairie de fonctions. À cette fin nous nous aiderons du mémoire de Joffroy Henrard [Henrard, 2013] qui documente ce manipulateur. Dans un second temps, nous aurons à comprendre l’article [Abu-El-Ata & Chapront, 1975] et la méthode des coefficients de Laplace pour obtenir l’expression de l’inverse de la distance. Une fois ces étapes terminées, le coeur du mémoire sera de valider un code écrit en FORTRAN 90 il y a plusieurs années par Jacques Henrard et qui implémente la perturbation décrite dans [Abu-El-Ata & Chapront, 1975].

Les objectifs de ce mémoire sont de valider le code à notre disposition et de le corriger si nécessaire. Nous pourrons alors comparer l’évolution dynamique des systèmes extrasolaires obtenue à partir de cette approche avec celles que l’on peut trouver dans la littérature, afin de voir si la prise en compte de la variation des demi-grands axes permet une amélioration significative dans l’analyse de la dynamique. Ce mémoire est donc en lien direct avec la mécanique céleste et est principalement numérique, bien que la compréhension en profondeur du développement de la perturbation se révélera être un travail théorique assez conséquent.

## Chapitre 2

# Rappels théoriques

Dans ce chapitre nous rappelons certains concepts et développements qui seront importants dans la suite du mémoire. Nous commençons par une section sur le problème des deux corps qui détaille le calcul des orbites des corps et la formulation hamiltonienne du problème. Ensuite nous regardons le problème des trois corps et plus particulièrement son développement de Laplace-Lagrange.

Les calculs et développements de cette section sont fortement inspirés du livre [Murray & Dermott, 1999], du cours de Dynamique céleste et résonances [Noyelles, 2017] ou de celui de Mécanique du point et du solide [Lemaitre, 2017], ainsi que du cours [Duriez, 2007].

### 2.1 Le problème des deux corps

Dans cette section nous développons le problème des deux corps en nous intéressant d'abord à la trajectoire des corps pour le réécrire ensuite sous une formulation hamiltonienne.

#### 2.1.1 Calcul de la trajectoire

Nous considérons deux corps,  $A$  et  $B$ , de masses  $m_A$  et  $m_B$ , qui interagissent l'un avec l'autre, repérés depuis une origine fixée  $O$ . Notons

$\vec{r}$  le vecteur reliant le corps  $A$  au corps  $B$ , (2.1)

$\vec{r}_A$  le vecteur reliant l'origine  $O$  au corps  $A$  et (2.2)

$\vec{r}_B$  le vecteur reliant l'origine  $O$  au corps  $B$ . (2.3)

Ces vecteurs sont représentés à la figure 2.1.

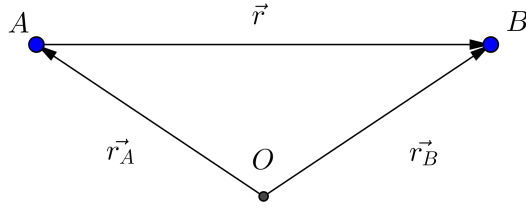


FIGURE 2.1 – Représentation des corps  $A$  et  $B$  autour de l'origine  $O$

Les forces gravitationnelles que subissent les deux corps sont

$$m_A \frac{d^2 \vec{r}_A}{dt^2} = - \frac{G m_A m_B \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \quad (2.4)$$

et

$$m_B \frac{d^2 \vec{r}_B}{dt^2} = - \frac{G m_A m_B \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}, \quad (2.5)$$

où  $G = 6.67260 \times 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{kg}^{-2}$ .

Puisque nous sommes en présence de forces obéissant au principe d'action-réaction, la quantité de mouvement est une intégrale vectorielle du système, c'est-à-dire que son centre de masse se déplace à vitesse constante :

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B}{m_A + m_B} \right) = 0.$$

Nous pouvons prendre celui-ci comme centre du repère et écrire les positions dans ce nouveau repère des corps  $A$  et  $B$  respectivement :

$$\begin{aligned} \vec{y}_A &= \vec{r}_A - \left( \frac{m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B}{m_A + m_B} \right), \\ \vec{y}_B &= \vec{r}_B - \left( \frac{m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B}{m_A + m_B} \right). \end{aligned}$$

Nous pouvons facilement vérifier que le centre de masse est bien l'origine de ce repère :

$$m_A \vec{y}_A + m_B \vec{y}_B = 0. \quad (2.6)$$

Nous réécrivons les équations (2.4) et (2.5) dans ce nouveau repère

$$m_A \frac{d^2 \vec{y}_A}{dt^2} = - \frac{G m_A m_B (\vec{y}_A - \vec{y}_B)}{\|\vec{y}_A - \vec{y}_B\|^3}$$

et utilisons l'équation (2.6) afin d'éliminer  $\vec{y}_B$  de l'équation précédente et d'obtenir

$$m_A \frac{d^2 \vec{y}_A}{dt^2} = \frac{-G m_A m_B^3}{(m_A + m_B)^2} \frac{\vec{y}_A}{\|\vec{y}_A\|^3}.$$

Posons  $\vec{y}_A = \vec{r}$  et  $\mu = \frac{G m_B^3}{(m_A + m_B)^2}$ . Nous obtenons ainsi

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}. \quad (2.7)$$

La force étant centrale, le système possède une intégrale du moment cinétique, ce qui indique que le mouvement a lieu dans un plan. Nous pouvons alors utiliser les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  et réécrire le vecteur de position  $\vec{r}$  comme

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= r \cos \theta \\ \vec{r}_2 &= r \sin \theta \\ \vec{r}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Nous posons  $\vec{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta)$ . Nous calculons maintenant les vecteurs de position, de vitesse et d'accélération dans ces coordonnées, où  $\vec{e}_\theta$  est le vecteur unité perpendiculaire au vecteur du rayon. Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \vec{e}_r, \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} \\ &= \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r (-\sin \theta, \cos \theta) \vec{e}_\theta \\ &= \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta, \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \right) \\ &= \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{e}_r + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \vec{e}_\theta - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{e}_r \\ &= \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_r + \left( 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

L'expression (2.4) dont on ne prend en compte que les composantes en  $\vec{e}_r$  se réécrit comme suit :

$$\left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = \frac{\mu}{r^2}.$$

Cette équation est résolue dans [Murray & Dermott, 1999] et donne

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(f)},$$

où  $e$  est l'excentricité,  $f = \theta - \varpi$ ,  $\varpi$  étant la longitude du périastre, et  $p = \frac{h^2}{\mu}$ ,  $h$  étant le produit vectoriel entre  $\vec{r}$  et  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ . Ceci correspond à l'équation d'une conique en coordonnées polaires. Si  $e$  est inférieur à 1, il s'agit d'une ellipse, s'il est égal à 1, une parabole, et s'il est supérieur à 1, une hyperbole. Dans la plupart des problèmes de mécanique céleste, les orbites sont des ellipses, comme pour le Soleil et la Terre.

Enfin, nous considérons les différents éléments orbitaux qui servent à décrire les trajectoires elliptiques des corps célestes : Ceux-ci sont représentés à la figure 2.2.

$a$ = demi-grand axe,	$\omega$ = argument du périastre,
$e$ = excentricité,	$\Omega$ = longitude du noeud ascendant,
$I$ = inclinaison,	$f$ = anomalie vraie.

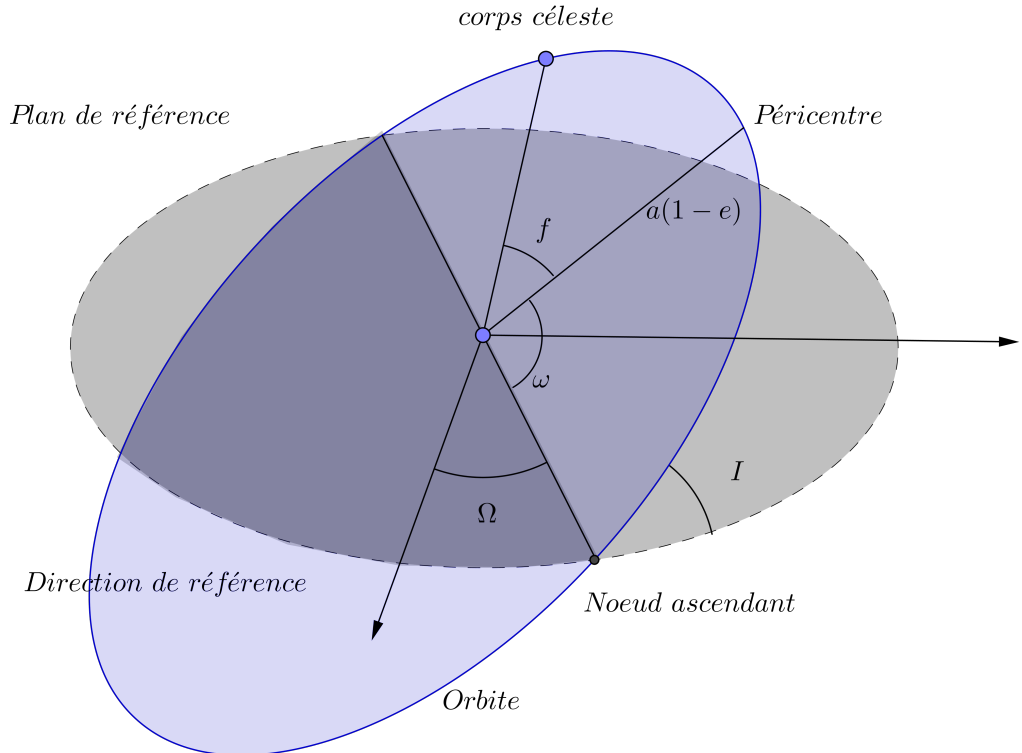


FIGURE 2.2 – Illustration des éléments orbitaux

Le demi-grand axe et l'excentricité déterminent la forme de l'ellipse. L'anomalie vraie est l'angle qui permet de fixer la position du corps sur l'ellipse, tandis que l'inclinaison, la longitude du nœud ascendant et l'argument du péricentre servent à situer l'ellipse dans l'espace.

Dans la section suivante nous exprimerons le problème des deux corps sous sa forme hamiltonienne et nous tâcherons de réécrire l'Hamiltonien afin qu'il dépende du moins de variables possibles.

### 2.1.2 Formulation hamiltonienne du problème des deux corps

Les résultats énoncés dans cette section seront pour la plupart admis. Des détails concernant les développements peuvent être trouvés dans le cours de Géométrie symplectique [Libert, 2017].

L'Hamiltonien du problème des deux corps est égal à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

$$H = T + V = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \frac{\mu}{r}.$$

En considérant les variables généralisées suivantes

$$\begin{aligned} q_1 &= x, & p_1 &= m_B v_x, \\ q_2 &= y, & p_2 &= m_B v_y, \\ q_3 &= z, & p_3 &= m_B v_z, \end{aligned}$$

où  $(x, y, z)$  sont les coordonnées cartésiennes, l'Hamiltonien se réécrit dans ces variables comme suit :

$$H(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m_B} - \frac{Gm_A m_B}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}.$$

Les équations hamiltoniennes associées sont définies par

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, 3.$$

Nous voulons maintenant exprimer ces variables en fonction des éléments orbitaux que nous avons définis avant. Pour ce faire, nous choisissons comme nouvelles variables

$$\begin{aligned} Q_1 &= r \\ Q_2 &= \theta \\ Q_3 &= h \end{aligned}$$

et utilisons la transformation de Mathieu pour trouver les moments  $P_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ )

$$\begin{aligned}
Q_1 &= r, & P_1 &= R = m_B \frac{dr}{dt}, \\
Q_2 &= \theta, & P_2 &= \Theta = \text{norme du moment cinétique}, \\
Q_3 &= h, & P_3 &= H = \Theta \cos(I) = \text{projection du moment cinétique sur l'axe } \vec{z}.
\end{aligned}$$

afin que la transformation des  $(q_i, p_i)$  aux  $(Q_i, P_i)$  soit canonique. Après calculs, nous obtenons le jeu de nouvelles variables suivant :

Nous pouvons écrire l'Hamiltonien dans ce jeu de variables

$$H(r, R, \Theta) = \frac{1}{2m_B} \left( R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu m_B}{r}.$$

Afin de réduire au maximum le nombre de variables présentes dans l'Hamiltonien, nous effectuons un second changement de variables canoniques via l'équation d'Hamilton-Jacobi et nous obtenons comme jeu de variables finales les éléments de Delaunay :

$$\begin{aligned}
l &= M, \text{ anomalie moyenne,} & L &= \sqrt{\mu a}, \\
g &= \omega, \text{ argument du péricentre,} & G &= \sqrt{\mu a(1 - \epsilon^2)}, \\
h &= \Omega, \text{ longitude du noeud ascendant,} & H &= G \cos I.
\end{aligned}$$

Cela donne l'Hamiltonien suivant

$$H(L) = -\frac{\mu^2}{2L^2}.$$

Nous constatons qu'il ne dépend plus que de la variable  $L$ , ce qui signifie que toutes les variables sont constantes sauf  $l$ , puisque

$$\dot{l} = \frac{\partial H}{\partial L} \neq 0.$$

Dans le problème des deux corps, l'orbite est donc une ellipse identique au cours du temps et qui ne varie pas dans l'espace. Seul le corps évolue sur l'orbite, représenté par le paramètre  $l$ .

Dans la section suivante nous travaillerons sur le problème des trois corps, en particulier son développement de Laplace-Lagrange.

## 2.2 Le problème des trois corps

Dans cette section nous nous intéressons au problème des trois corps. On considère le problème planétaire des trois corps où un corps a une masse largement supérieure



à celle des deux autres corps. Ceci peut s'appliquer à une étoile autour de laquelle orbitent deux planètes. Nous allons commencer par exprimer ce problème sous une formulation hamiltonienne. Ensuite nous étudierons le développement de l'Hamiltonien en série des excentricités et des inclinaisons.

Les développements qui vont suivre s'inspirent de la thèse [Libert, 2007].

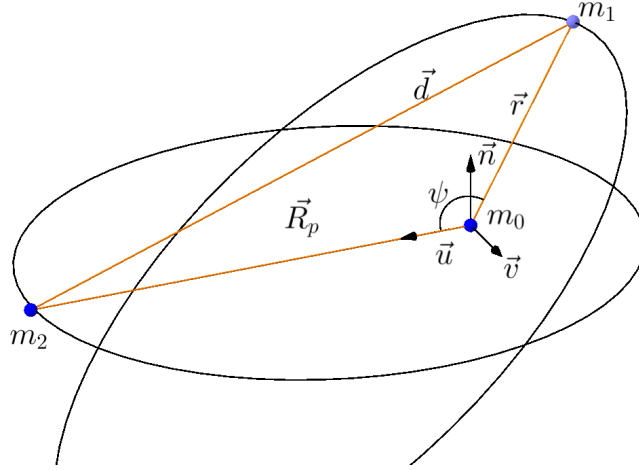


FIGURE 2.3 – Illustration du problème des trois corps

### 2.2.1 Formulation hamiltonienne

Nous considérons trois corps, à savoir une étoile  $m_0$  et deux planètes  $m_1$  et  $m_2$  dont les masses sont supposées inférieures. Une illustration du problème des trois corps est donnée à la figure 2.3. Si nous considérons la révolution de chacune des planètes, nous sommes dans la situation du problème des deux corps. Cependant, il faut également prendre en compte les interactions entre les planètes. Ce problème nous permettra d'introduire la théorie des perturbations et les séries de Poisson.

Nous prenons le barycentre comme origine du repère et écrivons la seconde loi de Newton

$$m_i \frac{d^2 \vec{u}_i}{dt^2} = -m_i G \sum_{j \neq i} m_j \frac{\vec{u}_i - \vec{u}_j}{\|\vec{u}_i - \vec{u}_j\|^3},$$

où  $\vec{u}_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) désigne la position du corps  $i$  par rapport à l'origine. Il s'agit d'un système différentiel d'ordre 18. Cependant le problème des trois corps possède deux symétries qui vont impliquer 5 intégrales premières. Tout d'abord le problème est invariant dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , cela revient à dire que le barycentre se déplace de manière rectiligne uniforme. Cela implique les résultats suivants :

$$\sum_{i=0}^2 m_i \vec{u}_i = 0, \quad \sum_{i=0}^2 \frac{d\vec{u}_i}{dt} = 0.$$

Ensuite le problème est également invariant par rotation dans  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire que son moment cinétique est invariant en norme et direction.

Nous allons effectuer la réduction au centre de masse. Pour ce faire nous exprimons l'Hamiltonien du problème dans les coordonnées de Jacobi. Ces coordonnées sont représentées à la figure 2.4. Le principe est de repérer chacun des corps  $P_i$  par rapport au barycentre  $G_{i-1}$  des  $i$  corps précédents. Si nous notons  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  les coordonnées respectives de l'étoile et des deux planètes, nous pouvons écrire les coordonnées de Jacobi comme suit :

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 - \alpha_0 \\ x_2 &= \alpha_2 - \alpha_0 - \kappa_1(\alpha_1 - \alpha_0) \\ y_1 &= \beta_1 - \beta_0 \\ y_2 &= \beta_2 - \beta_0 - \kappa_1(\beta_1 - \beta_0) \\ z_1 &= \gamma_1 - \gamma_0 \\ z_2 &= \gamma_2 - \gamma_0 - \kappa_1(\gamma_1 - \gamma_0) \end{aligned}$$

où  $\kappa_1 = \frac{m_1}{m_0 + m_1}$ . Nous écrirons désormais  $r_i$  pour désigner le vecteur position du corps  $i$  dans le repère jacobien.

Écrivons l'Hamiltonien dans ces nouvelles coordonnées

$$H = -\frac{Gm_0m_1}{2a_1} - \frac{Gm_0m_2}{2a_2} - Gm_1m_2 \left( \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} - \frac{(\vec{r}_1|\vec{r}_2)}{r_2^3} \right) \quad (2.8)$$

où  $a_1$  et  $a_2$  sont les demi-grands axes respectifs. Les deux premiers termes sont les Hamiltoniens des problèmes des deux corps correspondant aux corps 1 et 2 respectivement tandis que le troisième terme représente la perturbation provenant de l'interaction entre les deux planètes.

Notons cependant qu'il s'agit d'une approximation de l'Hamiltonien des deux corps qui est limitée au premier ordre des masses. Nous nous permettons cela puisque nous travaillons dans un système où le corps central (l'étoile) est considéré bien plus massif que les deux autres corps.

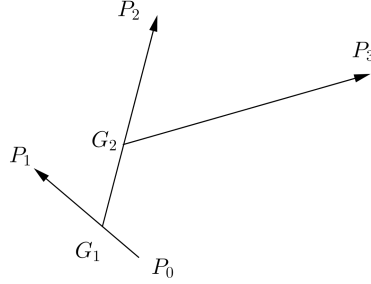


FIGURE 2.4 – Coordonnées de Jacobi

### 2.2.2 Développement en excentricités et inclinaisons

Il existe deux développements principaux de la perturbation de l'Hamiltonien (2.8), le développement en polynômes de Legendre et celui en coefficients de Laplace. Ce dernier développe la perturbation en excentricités et inclinaisons et sera explicité ici. Nous nous limiterons dans cette section au second ordre en excentricités et inclinaisons. Ce développement porte le nom de théorie de Laplace-Lagrange. Cette limitation, bien qu'adaptée au Système solaire, ne fonctionne pas pour les systèmes extrasolaires. [Libert, 2007] a montré qu'une généralisation de ce développement à l'ordre 12 en excentricités et inclinaisons permet de décrire précisément les évolutions dynamiques des systèmes extrasolaires. Les grandes étapes du développement de Laplace-Lagrange sont données ci-dessous. Puisque ce développement est le coeur de notre travail, elles seront décrites en détail au chapitre 3.

Nous pouvons exprimer les vecteurs  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  d l'expression (2.8) en fonction des éléments orbitaux

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & -\sin I \\ 0 & \sin I & \cos I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos f \\ r \sin f \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si nous exprimons la relation précédente en fonction du rapport  $\frac{i}{2}$  et non plus de l'inclinaison elle-même, nous obtenons

$$\begin{cases} x_1 &= r_1 \left[ \cos(f_1 + \omega_1 + \Omega_1) + 2 \sin^2 \frac{i_1}{2} \sin(f_1 + \omega_1) \sin \Omega_1 \right] \\ y_1 &= r_1 \left[ \sin(f_1 + \omega_1 + \Omega_1) - 2 \sin^2 \frac{i_1}{2} \sin(f_1 + \omega_1) \cos \Omega_1 \right] \\ z_1 &= r_1 \left[ 2 \sin \frac{i_1}{2} \cos \frac{i_1}{2} \sin(f_1 + \omega_1) \right], \end{cases} \quad (2.9)$$

ainsi qu'un résultat similaire pour la seconde planète. Dans le cas d'un système coplanaire, ces équations se limitent à

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos(f_1 + \omega_1 + \Omega_1), & x_2 &= r_2 \cos(f_2 + \omega_2 + \Omega_2), \\ y_1 &= r_1 \sin(f_1 + \omega_1 + \Omega_1), & y_2 &= r_2 \sin(f_2 + \omega_2 + \Omega_2). \end{aligned}$$

## Partie indirecte

En nous basant sur une série de développements effectués dans [Libert, 2007], nous pouvons réécrire chacun des termes de la perturbation de (2.8). Nous allons commencer par travailler sur la partie indirecte de celle-ci.

En utilisant la définition de la longitude moyenne  $\lambda_i = M_i + \Omega_i + \omega_i$  où  $M_i$  est l'anomalie moyenne, nous avons que l'angle  $f_i + \omega_i + \Omega_i$  est équivalent à  $\lambda_i + f_i - M_i$ . Notre but va être d'exprimer les normes  $r_i$  et les anomalies vraies  $f_i$  en fonction des demi-grands axes et des excentricités. A cette fin, nous utilisons les développements en série classiques suivants :

$$\begin{aligned} \cos(f - M) = & 1 - e^2 + \frac{7e^2}{64} + \dots - e \left[ \frac{5e^2}{4} - \frac{51e^4}{144} + \dots \right] \cos M \\ & + e^2 \left[ 1 - \frac{15e^2}{9} \dots \right] \cos 2M + e^3 \left[ \frac{5}{4} - \frac{37e^2}{16} + \dots \right] \cos 3M + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \sin(f - M) = & e \left[ 2 - \frac{5e^2}{4} + \frac{51e^4}{144} + \dots \right] \sin M \\ & + e^2 \left[ \frac{5}{4} - \frac{41e^2}{24} + \dots \right] \sin 2M + e^3 \left[ \frac{51}{36} - \frac{339e^2}{144} + \dots \right] \sin 3M + \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} = & 1 + \frac{e^2}{2} + \dots - e \left[ 1 - \frac{3e^2}{8} + \frac{5e^4}{192} + \dots \right] \cos M \\ & - e^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{e^2}{3} + \dots \right] \cos 2M - e^3 \left[ \frac{3}{8} - \frac{45e^2}{188} + \dots \right] \cos 3M + \dots \end{aligned}$$

Ces développements possèdent la caractéristique de d'Alembert dans les couples  $(e_1, M_1)$  et  $(e_2, M_2)$ .

**Définition 2.2.1.** La fonction  $F$  possède la caractéristique de d'Alembert pour le couple  $(\alpha, \beta)$  si pour chacun de ses termes, l'exposant de  $\alpha$  est au moins égal au multiple  $\beta$  et de même parité.

Un calcul nous permet de trouver le produit scalaire des vecteurs positions  $\vec{r}_i$  :

$$(\vec{r}_1 | \vec{r}_2) = r_1 r_2 \left\{ \begin{aligned} & \cos S \\ & - \sin^2 \frac{i_1}{2} \left[ \cos S - \cos^2 \frac{i_2}{2} \cos(S - 2f_1 - 2\omega_1) \right] \\ & - \sin^2 \frac{i_2}{2} \left[ \cos S - \cos^2 \frac{i_1}{2} \cos(S - 2f_2 - 2\omega_2) \right] \\ & + 2 \sin \frac{i_1}{2} \cos \frac{i_1}{2} \sin \frac{i_2}{2} \cos \frac{i_2}{2} [\cos(f_1 + \omega_1 - f_2 - \omega_2) - \cos(f_1 + \omega_1 + f_2 + \omega_2)] \\ & + \sin^2 \frac{i_1}{2} \sin^2 \frac{i_2}{2} [\cos S + \cos(S - 2f_1 - 2\omega_1 + 2f_2 + 2\omega_2)], \end{aligned} \right.$$

où  $S = f_1 + \omega_1 + \Omega_1 - f_2 - \omega_2 - \Omega_2$ . En utilisant un développement de Taylor des quantités  $\cos \frac{i}{2}$  sur cette expression, nous pouvons trouver une série dépendant uniquement de  $\sin \frac{i}{2}$ . Ce produit scalaire présente également la caractéristique de d'Alembert dans les couples  $(\sin \frac{i_1}{2}, f_1 + \omega_1)$  et  $(\sin \frac{i_2}{2}, f_2 + \omega_2)$ .

Nous pouvons à présent donner l'expression de la partie indirecte :

$$\begin{aligned} \frac{(\vec{r}_1 | \vec{r}_2)}{r_2^3} &= \frac{a_1}{a_2^2} \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \\ &+ \frac{a_1}{a_2^2} F_1 \left( \sin \frac{I_1}{2}, \sin \frac{I_2}{2}, e_1, e_2, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 - \Omega_1, \lambda_2 - \Omega_2, \lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1, \lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2 \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

### Partie directe

Nous développons maintenant la distance entre les deux planètes :

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 = a_2^2 \left( 1 + \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^2 - 2 \left( \frac{a_1}{a_2} \right) \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \right) + a_2^2 F_2 \quad (2.13)$$

où

$$\begin{aligned} a_2^2 F_2 &= a_1^2 G_1(e_1, \lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1) + a_2^2 G_2(e_2, \lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2) \\ &+ a_1 a_2 G_3 \left( \sin \frac{I_1}{2}, \sin \frac{I_2}{2}, e_1, e_2, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 - \Omega_1, \lambda_2 - \Omega_2, \lambda_1 - \omega_1 - \Omega_1, \lambda_2 - \omega_2 - \Omega_2 \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Les fonctions  $F_1$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  et  $G_3$  possèdent la caractéristique de d'Alembert dans les couples  $(\sin \frac{I_1}{2}, \lambda_1 - \Omega_1)$ ,  $(\sin \frac{I_2}{2}, \lambda_2 - \Omega_2)$ ,  $(e_1, \lambda_1 - \omega_1)$  et  $(e_2, \lambda_2 - \omega_2)$ .

En utilisant un développement en série de Taylor de l'expression, nous trouvons

$$\frac{a_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = D + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} F_2^n D^{2n+1} \quad (2.15)$$

où  $D = \left( 1 + \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^2 - 2 \left( \frac{a_1}{a_2} \right) \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \right)^{-\frac{1}{2}}$  et où la notation  $(.)!!$  représente les factorielles croissantes (voir définition 3.2.2 du chapitre 3).

Si nous appliquons un développement en série de Fourier de  $D^{2n+1}$ , nous obtenons

$$D^{2n+1} = \sum_{k \geq 0} B_k^{\frac{(2n+1)}{2}} \cos k(\lambda_1 - \lambda_2), \quad (2.16)$$

où  $B_k^{\frac{(2n+1)}{2}}$  sont appelés *coefficients de Laplace* et sont les fonctions hypergéométriques :

$$B_k^{\frac{(2n+1)}{2}} = 2 \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^k \frac{(2k+2n-1)!!}{(2k)!!(2n-1)!!} F \left( \frac{2n+1}{2}, \frac{2n+1}{2} + k, k+1, \left( \frac{a_1}{a_2} \right) \right). \quad (2.17)$$

Ces coefficients présentent une singularité en  $\frac{a_1}{a_2} = 1$ . On peut également montrer que pour des valeurs du rapport des demi-grands axes petites ( $\leq 0.5$ ), la série de Fourier  $D^{2n+1}$  converge relativement vite.

Enfin, en rassemblant (2.12), (2.15), (2.16) et (2.17) nous obtenons l'Hamiltonien

$$H = -\frac{Gm_0m_1}{2a_1} - \frac{Gm_0m_2}{2a_2} - \frac{Gm_1m_2}{a_2} \sum_{k,i_l,j_l,l \in \underline{4}} A_{i_l}^{k,j_l} e_1^{|j_1|+2i_1} e_2^{|j_2|+2i_2} \left(\sin \frac{i_1}{2}\right)^{|j_3|+2i_3} \left(\sin \frac{i_2}{2}\right)^{|j_4|+2i_4} \cos \Phi \quad (2.18)$$

où

$$\Phi = [(k+j_1+j_3)\lambda_1 - (k+j_2+j_4)\lambda_2 - j_1(\omega_1 + \Omega_1) + j_2(\omega_2 + \Omega_2) - j_3\Omega_1 + j_4\Omega_2], \quad (2.19)$$

avec les indices  $(k, i_l, j_l, l \in \underline{4})$  étant des entiers positifs pour  $(k, i_l, l \in \underline{4})$  et tels que  $j_3 + j_4$  est pair. Remarquons que les coefficients  $A_{i_l}^{k,j_l}$  dépendent uniquement du rapport des demi-grands axes. L'Hamiltonien présente six degrés de liberté. Cette série que nous venons d'obtenir est une série de Fourier avec  $\lambda_i$ ,  $\omega_i$  et  $\Omega_i$  comme variables angulaires et dont les coefficients sont polynomiaux en les variables  $e_i$  et  $\sin(\frac{i_l}{2})$ .

Nous pouvons faire quelques commentaires sur le développement (2.18). Lorsque nous additionnons les coefficients des angles se trouvant dans la combinaison  $\Phi$ , nous obtenons une somme nulle. Nous pouvons interpréter cela comme le fait qu'ajouter une quantité arbitraire à chacun des angles ne modifie que l'origine et non les forces de ceux-ci. Puisque nous pouvons modifier simultanément les signes des inclinaisons sans changer le problème, il est nécessaire que la somme des exposants  $|j_3| + 2i_3$  et  $|j_4| + 2i_4$  soit paire. Enfin, cette expression possède également la caractéristique de d'Alembert dans les couples  $(e_1, \lambda_1 - \varpi_1)$ ,  $(e_2, \lambda_2 - \varpi_2)$ ,  $(\sin \frac{i_1}{2}, \lambda_1 - \Omega_1)$  et  $(\sin \frac{i_2}{2}, \lambda_2 - \Omega_2)$ .

## 2.3 Le manipulateur de séries namurois MSNam

À la section précédente nous avons décrit les grandes lignes du développement en série de l'Hamiltonien du problème des trois corps. Le manipulateur symbolique de séries MSNam, conçu à l'Université de Namur, permet de manipuler des séries de Poisson de la forme

$$S = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_p}} A_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_p} x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p} \left( \frac{\cos}{\sin} \right) (j_1 \phi_1 + \dots + j_p \phi_p). \quad (2.20)$$

Ceci correspond bien à une série de la même forme que celle de l'Hamiltonien que nous venons de construire.

Le MSNam est donc un ensemble de sous-routines écrites en FORTRAN 90. Il a été conçu en FORTRAN 77 par Michèle Moons puis amélioré et adapté au FORTRAN

90 par Jacques Henrard en 2004. Son champ d'utilisation est divers et varié, allant de la libration de la Lune jusqu'au sujet nous intéressant ici, les exoplanètes.

Dans ce mémoire, nous utiliserons le MSNam pour réaliser le développement en excentricités et inclinaisons de l'Hamiltonien du problème des trois corps. En effet, ce développement a déjà été implémenté par Jacques Henrard sur base de l'article [Abu-El-Ata & Chapront, 1975]. Avant d'entrer dans le vif du sujet, introduisons plus en détail le manipulateur MSNam.

### 2.3.1 Comment sont codées les séries dans MSNam

Il est intéressant de comprendre comment le manipulateur MSNam code et stocke les séries. A chaque série est assigné un entier appelé identifiant, qui sera utilisé dans les appels aux sous-routines. Cet identifiant sera noté A,B, etc. Par abus de langage, nous emploierons le terme de "série A" pour parler de la série dont l'identifiant est l'entier  $\sim A$ .

Au début, tous les identifiants sont initialisés à zéro pour signifier que les séries sont vides. La première série créée verra son identifiant initialisé à 1, la suivante à 2 et ainsi de suite. Dans le cas où une série est stockée en fonction de sa valeur absolue, son identifiant sera négatif. Si deux séries possèdent le même identifiant, elles sont égales.

Si nous nous référons à la série (2.20), nous pouvons détailler comment sont stockés les différents éléments de cette expression. Les coefficients  $A_{i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_p}$  sont stockés sous forme de réels en double précision dans le vecteur *MStabcoef*. Les arguments des variables polynomiales  $j_1, \dots, j_q$ , les coefficients des variables trigonométriques  $i_1, \dots, i_p$ , et l'indicateur sinus-cosinus (0 s'il s'agit d'un cosinus, 1 s'il s'agit d'un sinus) sont codés dans un grand tableau *MStables*.

### 2.3.2 Initialisation et validation

Le code commence en faisant appel aux modules *MSparameter* et *MStables*. Le premier contient les paramètres devant être définis par l'utilisateur et le second utilise ces paramètres pour créer les tableaux dans lesquelles seront stockées les séries. Regardons ces deux modules d'un peu plus près.

#### MSparameter

Ce module contient une série de paramètres qui seront utilisés par MSNam. Il est essentiel que l'utilisateur les modifie en fonction du programme qu'il écrit. Voici la liste des paramètres qui peuvent être gérés à partir du module MSparameter.

1. **MSnvt** : Nombre de variables trigonométriques
2. **MSnvp** : Nombre de variables polynomiales
3. **MSnvar** : Nombre total de variables, cela correspond à **MSnvt+MSnvp**

4. **MSnamevt** : Vecteur de la dimension de **MSnvt** qui contient le nom des variables trigonométriques
5. **MSnamevp** : Vecteur de la dimension de **MSnvp** qui contient le nom des variables polynomiales
6. **MSaccuracy** : Paramètre permettant de supprimer les termes négligeables. Dans certaines sous-routines les termes dont la valeur absolue est inférieure à ce paramètre sont éliminés
7. **MSnwords** : Place accordée afin de stocker le code des arguments des séries
8. **MSstorelength** : Nombre maximum de termes présents dans toutes les séries à un moment donné
9. **MSnmaxser** : Nombre maximum de séries présentes à un moment donné
10. **MSordmax** : Ordre maximum des sous-routines vectorielles
11. **MSnmax** : Vecteur de dimension **MSnvar** qui indique pour chaque argument et exposant, la valeur maximale que peut prendre sa valeur absolue

### 2.3.3 MStables

Ce module va faire appel au module *MSparameter* et utiliser les paramètres définis dans celui-ci afin de créer les tableaux qui serviront dans le codage des séries. Nous allons lister les paramètres que va initialiser ce module, bien que ceux-ci ne doivent pas être modifiés par l'utilisateur.

1. **MStabcoef** : Vecteur de réels en double précision de dimension **MSstorelength** qui contient les coefficients des termes des séries
2. **MSTABLES** : Tableau d'entiers de dimension(**MSnwords**,**MSstorelength**) qui contient la version codée des exposants des variables polynomiales, des coefficients des variables trigonométriques et de l'indicateur sinus-cosinus
3. **MSfree** : Un entier qui indique la prochaine case libre
4. **MSnser** : Entier indiquant le nombre de séries actives
5. **MSlength** : Un vecteur d'entiers de dimension **MSnmaxser** indiquant la position du premier terme de chaque série dans l'espace de stockage
6. **MSnvw** : Un vecteur d'entiers de dimension **MSnmaxser** indiquant la taille de chaque série
7. **MSshift** : Un vecteur d'entiers de dimension **MSnwords** déterminant la dispersion du nombre de variables pour le codage des séries



## Chapitre 3

# Développement analytique de l'inverse de la distance

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur l'étude des développements de l'inverse de la distance réalisé dans l'article [Abu-El-Ata & Chapront, 1975]. Cet article à servi de base à l'écriture du programme de Jacques Henrard qui sera analysé en détails au chapitre suivant. Il s'agit donc avant tout de bien comprendre ce développement. Nous présentons le développement de l'article tout en détaillant plus en profondeur les calculs.

### 3.1 Considérations générales

Le problème en question dans [Abu-El-Ata & Chapront, 1975] est celui du développement analytique de l'inverse de la distance ( $\Delta^{-\sigma}$ , avec  $\sigma \geq 1$ ) entre deux planètes. Ce développement est présent dans l'expression de la partie directe de la perturbation du le problème des trois corps (2.15). Les limitations qui sont couramment rencontrées dans la littérature quant à ce développement sont les relations de récurrence qui rendent pénible la manipulation des expressions et une erreur de troncature importante concernant le rapport des demi-grands axes. Afin d'éviter ces problèmes, l'article de [Abu-El-Ata & Chapront, 1975] va suivre les principes suivants :

1. Donner un développement analytique dans toutes les variables (à l'exception de  $\alpha$ ) pour  $\sigma \geq 1$ .
2. Calculer les fonctions qui comportent  $\alpha$  précisément et sans troncature et mettre en évidence le pole  $\alpha^2 = 1$ ,
3. Calculer le développement directement via des opérations sur les séries tronquées afin d'éviter la manipulation d'expressions trop complexes.

L'originalité principale de l'article provient en grande partie de ce dernier point.

Considérons un repère héliocentrique centré en  $O$ , on peut exprimer le carré de la distance entre deux planètes  $P$  et  $P'$  en utilisant le théorème de Pythagore généralisé

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'U \cdot U'. \quad (3.1)$$

où  $r$  et  $r'$  sont les distances respectivement du centre  $O$  jusqu'aux planètes  $P$  et  $P'$  et où  $U$  et  $U'$  sont les vecteurs unitaires correspondants.

Le calcul de l'inverse de la distance  $\Delta^{-\sigma}$  proposé par l'article s'effectuera en deux temps. Tout d'abord il réalisera un développement par rapport aux inclinaisons et dans un second temps, il développera l'expression en quantité de l'ordre des excentricités. Son but sera de mettre en évidence deux caractéristiques : d'une part il cherche à faire apparaître le pôle de la fonction du rapport des demi-grands axes  $\alpha$  et d'autre part il souhaite établir un formalisme tel que les développements puissent être réalisés par une suite d'opérations élémentaires finies.

### 3.2 Développement en inclinaisons

Dans cette section, l'article commence par effectuer un développement en inclinaisons de l'inverse de la distance. Puisque  $U$  et  $U'$  sont des vecteurs unitaires, si on pose l'angle entre les vecteurs  $r$  et  $r'$  comme étant  $S$ , le produit scalaire vaut

$$U \cdot U' = \cos S.$$

Nous posons  $\rho = \frac{r}{r'}$  le rapport des vecteurs de position des corps avec  $r' > r$  par hypothèse. Ainsi, l'expression (3.1) devient

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos S \\ \iff \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{r'}(1 + \rho^2 - 2\rho \cos S)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Nous cherchons à obtenir un développement similaire à celui de l'expression (2.15) du chapitre précédent. Pour ce faire, nous définissons les variables suivantes :

$$D = [1 + \rho^2 - 2\rho \cos(l - l')]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2)$$

où  $l$  est la longitude vraie de manière similaire au  $D$  de l'expression (2.15), et

$$u = 2(\cos S - \cos(l - l')), \quad (3.3)$$

où  $l - l'$  est la différence des longitudes vraies. Nous développons l'inverse de la distance en utilisant les relations (3.2) et (3.3) :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{r'}(1 + \rho^2 - 2\rho \cos S)^{-1/2} \\
&= \frac{1}{r'}(D^2 - \rho u)^{-1/2} \\
&= \frac{1}{r'}D^{-1}(1 - \rho u D^{-2})^{-1/2}.
\end{aligned}$$

L'article développe l'inverse de la distance à la puissance  $-\sigma$ , c'est-à-dire

$$\Delta^{-\sigma} = r'^{-\sigma} D^{-\sigma} (1 - \rho u D^{-2})^{-\sigma/2} \quad (3.4)$$

L'article va ensuite développer en série cette expression. Pour ce faire, il utilise le développement classique suivant.

**Définition 3.2.1.**

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Nous l'appliquons à l'expression (3.4) et obtenons

$$\begin{aligned}
\Delta^{-\sigma} &= r'^{-\sigma} D^{-\sigma} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\sigma/2)(-\sigma/2-1)\dots(-\sigma/2-n+1)}{n!} (-\rho u D^{-2})^n \right) \\
&= r'^{-\sigma} D^{-\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{\sigma}{2})_n}{(1)_n} (-1)^n (\rho u D^{-2})^n \\
&= r'^{-\sigma} D^{-\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{\sigma}{2})_n}{(1)_n} (-1)^n \rho^n u^n D^{-2n} \\
&= r'^{-\sigma} D^{-\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{\sigma}{2})_n}{(1)_n} \rho^n D^{-2n} u^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{\sigma}{2})_n}{(1)_n} r^n r'^{-n-\sigma} D^{-\sigma-2n} u^n.
\end{aligned} \quad (3.5)$$

La notation  $(.)_n$  utilisée ici est celle du symbole de Pochhammer pour désigner des factorielles croissantes, dont la définition est donné ci-après.

**Définition 3.2.2.**

$$(x)_n = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1).$$

Pour parvenir à l'expression 3.5, nous avons également utilisé certaines propriétés importantes de la factorielle croissante

1.

$$(x)_n = \frac{(x+n-1)!}{(x-1)!},$$

2.

$$(-x)_n = (-1)^n (x)_n.$$

### 3.3 Développement en excentricités

La prochaine étape consiste à se s'attarder sur le développement de  $D^{-\sigma-2n}$  afin de pouvoir développer l'expression 3.5.

En utilisant la définition de  $D$  (3.2), nous obtenons

$$D^{-s} = [1 + \rho^2 - 2\rho \cos(l - l')]^{-s/2}.$$

Le but de la démarche effectuée est de conserver explicitement les fonctions de  $\alpha$  afin qu'elles puissent être calculées avec autant de précision que voulu. À cette fin, nous éviterons toute troncature des séries en  $\alpha^k$  pour un multiple fixé de la différence des longitudes moyennes. Rappelons enfin que  $\rho = \frac{r}{r'}$  et que  $\alpha = \frac{a}{a'}$ . En partant de sa définition, nous allons développer  $D$  par un développement en série de Fourier. Rappelons comment est formée une telle série.

**Définition 3.3.1. Série de Fourier associée à  $f(x)$**

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

où

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k \geq 1 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

Selon un résultat connu des séries de Fourier, si la fonction  $f$  est paire, les coefficients  $b_k$  s'annulent. Dans notre cas, puisque le cosinus est une fonction paire, notre fonction  $D$  l'est également et les coefficients  $b_k$  sont nuls. Nous pouvons donc développer  $D$  comme suit :

$$\begin{aligned}
(1 + \rho^2 - 2\rho \cos(l - l'))^{-s/2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \rho^2 - 2\rho \cos(t))^{-s/2} dt \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \rho^2 - 2\rho \cos(t))^{-s/2} \cos(kt) dt \cos(k(l - l')) \\
&= \frac{1}{2} b_{\frac{s}{2}}^{(0)}(\rho) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} b_{\frac{s}{2}}^{(k)} \cos(k(l - l')) \\
&\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{\frac{s}{2}}^{(k)}(\rho) \cos(l - l').
\end{aligned}$$

Dans ce développement les  $b_{\frac{s}{2}}^{(k)}$  sont appelés coefficients de Laplace. Ce sont des fonctions paires que nous avons rencontrées à l'expression (2.17) du chapitre précédent sous leur forme hypergéométrique. Ils peuvent également être définis par une intégrale de la manière suivante :

$$\frac{1}{2} b_s^j(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(j\psi)}{(1 - 2x \cos(\psi) + x^2)^s} d\psi.$$

L'égalité (1) est obtenue en remarquant que les termes de la série sont paires, puisque les coefficients de Laplace le sont et le cosinus également.

Enfin nous réécrivons l'expression  $D^{-s}$  sous la forme :

$$\begin{aligned}
D^{-s} &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{\frac{s}{2}}^{(k)}(\rho) \cos(l - l') \\
&= (2 - \delta_k^0) \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} b_{\frac{s}{2}}^{(k)}(\rho) \tau^k \bar{\tau}'^k \right], \tag{3.6}
\end{aligned}$$

où  $\tau = e^{jl}$  en utilisant  $\cos(kx) = \frac{e^{jkx} + e^{-ikx}}{2}$  et où  $\delta_k^0$  est le symbole de Kronecker.

Comme nous l'avons constaté au chapitre précédent, les coefficients de Laplace peuvent s'exprimer à partir de fonctions hypergéométriques, dont la définition est donnée ci-dessous.

### Définition 3.3.2. Fonction hypergéométrique

$$F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!},$$

où  $(a)_n$  est une factorielle croissante (3.2.2) .

En utilisant un résultat connu, nous donnons l'expression des coefficients de Laplace en terme de fonction hypergéométriques

$$\frac{1}{2}b_{\frac{s}{2}}^{(k)}(\rho) = \frac{(\frac{k}{2})_k}{(1)_k} \rho^k F\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2} + k, k + 1, \rho^2\right). \quad (3.7)$$

Toujours dans le but de mettre en évidence le pôle en  $\alpha$ , nous allons effectuer un changement de variables sur  $\rho^2$  en écrivant  $\rho^2 = \alpha^2(1 + h)$  où  $h$  est une quantité de l'ordre des excentricités de l'une ou l'autre des planètes. Nous avons donc

$$h = \frac{\rho^2}{\alpha^2} - 1 = \left(\frac{r}{a} \frac{a'}{r'}\right)^2 - 1.$$

Notons que  $h$  est une quantité de l'ordre des excentricités d'une ou l'autre planète.

La fonction hypergéométrique peut se développer selon Taylor comme suit :

$$F(a, b, c, x + y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} \frac{y^m}{(1)_m} F(a + m, b + m, c + m, x).$$

En utilisant le fait que  $\rho^2 = \alpha^2 + \alpha^2 h$  et en appliquant ce développement à la fonction hypergéométrique présente dans les coefficients de Laplace en (3.7)

$$F\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2} + k, k + 1, \rho^2\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{s}{2})_m (\frac{s}{2} + k)_m}{(k + 1)_m} \frac{\alpha^{2m} h^m}{(1)_m} F\left(\frac{s}{2} + m, \frac{s}{2} + k + m, 1 + k + m, \alpha^2\right). \quad (3.8)$$

Dans le but de simplifier l'écriture nous allons poser

$$\phi_{\frac{s}{2}, m}^{(k)} = \frac{(\frac{s}{2})_k}{(1)_k} \frac{(\frac{s}{2})_m (\frac{s}{2} + k)_m}{(k + 1)_m} \alpha^{2m+k} F\left(\frac{s}{2} + m, \frac{s}{2} + k + m, 1 + k + m, \alpha^2\right). \quad (3.9)$$

Ceci nous permet de réécrire les coefficients de Laplace en utilisant (3.7), (3.8) et (3.9)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}b_{\frac{s}{2}}^{(k)} &= \frac{(\frac{k}{2})_k}{(1)_k} \rho^k F\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2} + k, k + 1, \rho^2\right) \\ &= \frac{(\frac{k}{2})_k}{(1)_k} \rho^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{s}{2})_m (\frac{s}{2} + k)_m}{(k + 1)_m} \frac{\alpha^{2m+k} h^m}{(1)_m \alpha^k} F\left(\frac{s}{2} + m, \frac{s}{2} + k + m, 1 + k + m, \alpha^2\right) \\ &= (\rho \alpha)^k \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{\frac{s}{2}, m}^{(k)} (\alpha^2) h^m \\ &= \left(\frac{r}{a} \frac{a'}{r'}\right)^k \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{\frac{s}{2}, m}^{(k)} (\alpha^2) h^m. \end{aligned}$$

Cette expression est une série d'ordre  $m$  en excentricités.

Il ne nous reste plus qu'à reporter cette expression dans la définition de  $D^{-s}$  (3.6), ce qui donne

$$D^{-s} = (2 - \delta_j^0) Re \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{\frac{s}{2}, m}^{(k)}(\alpha^2) h^m \left( \frac{r}{a} \tau \right)^k \left( \frac{a'}{r'} \bar{\tau}' \right)^k \right]. \quad (3.10)$$

Nous voulons désormais évaluer les fonctions  $\phi_{\frac{s}{2}, m}^{(k)}(\alpha^2)$ . A cette fin nous utiliserons la formule d'Euler suivante :

$$F(a, b, c, z) = (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b, c, z).$$

Si nous l'appliquons à la fonction hypergéométrique dans notre fonction  $\phi$  et en revenant à  $s = n + \frac{\sigma}{2}$ , nous obtenons directement

$$F\left(\frac{s}{2} + m, \frac{s}{2} + k + m, 1 + k + m, \alpha^2\right) = (1 - \alpha^2)^{1-\sigma-m-2n} F\left(1 + k - \frac{\sigma}{2} - n, 1 - \frac{\sigma}{2} - n, 1 + k + m, \alpha^2\right). \quad (3.11)$$

Dans cette expression, de par le terme  $(1 - \alpha^2)^{1-\sigma-m-2n}$ , on peut remarquer que nous avons un pôle en  $\alpha^2 = 1$  et que ce pôle peut se décomposer ainsi

1.  $1 - \sigma$  : puissance de  $\Delta^{-1}$
2.  $m$  : ordre en excentricités
3.  $n$  : ordre en inclinaisons.

Nous venons donc de faire apparaître un pôle en  $\alpha^2 = 1$  des fonctions  $\phi_{\frac{s}{2}, m}^{(k)}(\alpha^2)$ . Remarquons également que la fonction hypergéométrique du membre de droite de (3.11) converge beaucoup plus rapidement que celle du membre de gauche.

Il ne nous reste maintenant plus qu'à rassembler les expressions (3.5) et (3.10) afin d'obtenir notre expression finale de  $\Delta^{-\sigma}$  tronquée :

$$\Delta^{-\sigma} = r'^{-\sigma} (2 - \delta_k^0) Re \left( \sum_{k=0}^{k_M} \sum_{n=0}^{E(\frac{\omega}{2})} \sum_{m=0}^{\omega-2n} \frac{(\frac{\sigma}{2})_n}{(1)_n} \alpha^n \phi_{n+\frac{\sigma}{2}, m}^{(k)}(\alpha^2) \left( \frac{r}{a} \tau \frac{a'}{r'} \bar{\tau}' \right)^k h^m \left( \frac{r}{a} \frac{a'}{r'} u \right)^n \right).$$

Il est à noter que dans cette dernière expression,  $u^n$  sera développée avec l'expression (3.3).

Nous venons donc de construire l'expression de l'inverse de la distance. Pour rappel, les deux objectifs principaux de l'article étaient d'une part de mettre en évidence le pôle de la fonction du rapport des demi-grands axes  $\alpha$  aux ordres de multiplicité adéquats, et d'autre part d'utiliser un formalisme tel que les développements puissent être réalisés en une suite finie d'opérations élémentaires. Dans le chapitre suivant, nous nous pencherons sur l'implémentation de ce développement.



## Chapitre 4

# Etude du code

Dans ce chapitre nous détaillons le code force-fonction implémenté par Jacques Henrard sur base de l'article [Abu-El-Ata & Chapront, 1975]. L'objectif est de valider ce code en confirmant que le programme réalise bien le développement proposé par [Abu-El-Ata & Chapront, 1975] et qu'aucune erreur ne s'est glissée dans l'implémentation. L'intérêt de ce développement dans l'évolution à long terme des systèmes extrasolaires sera développé au chapitre suivant.

Notons qu'un READ\_ME du code est disponible. Celui-ci est mis à disposition en annexe du mémoire.

### 4.1 Uniformisation des notations

Il existe des différences de notations entre l'article [Abu-El-Ata & Chapront, 1975], le READ\_ME du code et le programme lui-même. Afin de clarifier celles-ci et d'éviter toute confusion, détaillons les notations de chaque source dans la table 4.1.

Il est important de noter que les notations  $r_1$  et  $r_2$  n'ont pas la même signification dans le READ\_ME que dans le code force-fonction. Nous adopterons dans la suite la convention selon laquelle  $r$  et  $r'$  représentent les quantités de l'article et correspondent donc à  $r_1$  et  $r_2$  du READ\_ME.

### 4.2 Lien entre l'article [Abu-El-Ata & Chapront, 1975] et le programme force-fonction

#### 4.2.1 Expression de [Abu-El-Ata & Chapront, 1975]

Afin de comparer l'expression de l'article avec celle de l'inverse de la distance décrite dans le READ\_ME du code, reprenons brièvement celle de [Abu-El-Ata & Chapront, 1975] détaillée au chapitre précédent :

$$\Delta^{-1} = r'^{-1} D^{-1} \left( -\frac{r}{r'} u D^{-2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.1)$$

Article	READ_ME	Code	Signification
$r$	$r_1$	-	norme du vecteur position du corps 1
$r'$	$r_2$	-	norme du vecteur position du corps 2
$k$	$n_l$	$m_1$	Différence des longitudes
$m$	$m$	$m_3$	Ordre en excentricités
$n$	$n_d$	$m_2$	Ordre en moitié des inclinaisons
$a$	$a_1$	-	Demi-grand axe du corps 1
$a'$	$a_2$	-	Demi-grand axe du corps 2
$\alpha = \frac{a}{a'}$	$\alpha = \frac{a_1}{a_2}$	$\alpha$	Rapport des demi-grands axes
$\rho = \frac{r}{r'}$	$\rho = \frac{r_1}{r_2}$	-	Rapport des normes des vecteurs position
$\frac{r}{a}$	$\frac{r_1}{a_1}$	$r_1$	Rapport entre la norme du vecteur position du corps 1 et son demi-grand axe
$\frac{r'}{a'}$	$\frac{r_2}{a_2}$	$r_2$	Rapport entre la norme du vecteur position du corps 2 et son demi-grand axe
$D = \frac{\Delta}{r'}$	$\Delta_0$	-	Expression (3.2)

TABLE 4.1 – Notations

où

$$u = 2(\cos \phi - \cos(l - l'))$$

et

$$D^{-1} = (2 - \delta_k^0) Re \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \phi_{\frac{1}{2},m}^{(k)}(\alpha^2) h^m \left( \frac{r}{a} e^{il} \right)^j \left( \frac{a'}{r'} e^{-il'} \right)^j \right),$$

avec

$$\phi_{n+\frac{1}{2},m}^{(k)} = \frac{(n+\frac{1}{2})_k (n+\frac{1}{2})_m (n+\frac{1}{2}+k)_m}{(1)_k (1)_m (1+k)_m} \alpha^{2m+k} F \left( n+\frac{1}{2}+m, n+\frac{1}{2}+k+m, 1+k+m; \alpha^2 \right).$$

#### 4.2.2 Expression du READ\_ME

Le programme force-fonction que nous allons analyser calcule le développement de la fonction perturbatrice du problème des trois corps

$$U = a_2 \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{(\vec{r} \vec{r}')}{\|\vec{r}'\|^3} \right),$$

où  $r$  et  $r'$  sont respectivement les vecteurs de position des corps  $m$  et  $m'$ , et où  $\Delta = \|\vec{r} - \vec{r}'\|$  comme précédemment. Nous avons également que  $a$  et  $a'$  sont les demi-grands axes respectifs. La partie du code la plus conséquente est constituée du développement de la partie directe  $\frac{a}{\Delta}$ .

Le READ\_ME du programme reprend l'expression suivante de l'inverse de la distance :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{a' \Delta_0} \left( 1 - 2 \frac{r}{r' \Delta_0^2} (\cos \phi - \cos(f_1 + g_1 + h_1 - f_2 - g_2 - h_2)) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

où

$$\frac{1}{\Delta_0} = \text{Re} \left( \left( \frac{a'}{r'} \right) \sum_{n_l \geq 0} e^{n_l \cdot i(\lambda - \lambda')} T_{n_l} \sum_{m \geq 0} h^m \phi_{n_d, m}^{(n_l)}(\alpha^2) \right).$$

Nous avons également

$$T_{n_l} = (2 - \delta_{n_l}^0) \cdot \left( \frac{r}{a} e^{i(f_1 - M)} \right)^{n_l} \cdot \left( \frac{a'}{r'} e^{-i(f_2 - M')} \right)^{n_l},$$

et

$$\phi_{n_d, m}^{(n_l)} = C_{n_d, m}^{(n_l)} \alpha^{2m+n_l} F \left( n_d + m + \frac{1}{2}, n_l + n_d + m + \frac{1}{2}, n_l + m + 1; \alpha^2 \right),$$

où

$$C_{n_d, m}^{(n_l)} = \frac{\Gamma(n_d + m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m + 1)} \frac{\Gamma(n_l + n_d + m + \frac{1}{2})}{\Gamma(n_l + m + 1)} \left( \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(n_d + \frac{1}{2})} \right)^2.$$

Rappelons également que

$$h = \left( \frac{r}{a} \frac{a'}{r'} - 1 \right).$$

### 4.2.3 Comparaison entre les deux expressions

Nous allons à présent établir une correspondance entre les expressions précédentes. Réécrivons les expressions sous une forme compacte identique et identifions les termes équivalents dans une même couleur.

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &= r'^{-1} (2 - \delta_k^0) \left( 1 - \frac{r}{r'} 2(\cos \phi - \cos(l - l')) D^{-2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\text{Re} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\left( n + \frac{1}{2} \right)_k \left( n + \frac{1}{2} \right)_m \left( n + \frac{1}{2} + k \right)_m}{(1)_k (1)_m (1+k)_m} \alpha^{2m+k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. F \left( n + \frac{1}{2} + m, n + \frac{1}{2} + k + m, 1 + k + m; \alpha^2 \right) \right) h^m \left( \frac{r}{a} e^{iw} \right)^k \left( \frac{a'}{r'} e^{-iw'} \right)^k \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{a'} \sum_{n_l \geq 0} \sum_{m \geq 0} (2 - \delta_{n_l}^0) \left( 1 - 2 \frac{r}{r' \Delta_0^2} (\cos \phi - \cos(f + g + h - f' - g' - h')) \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\text{Re} \left( \left( \frac{a'}{r'} \right) e^{n_l \cdot i(\lambda - \lambda')} \left( \frac{r}{a} e^{i(f - M)} \right)^{n_l} \left( \frac{a'}{r'} e^{-i(f' - M')} \right)^{n_l} h^m \right. \\ &\quad \left. \frac{\left( n_d + \frac{1}{2} \right)_m \left( n_d + \frac{1}{2} \right)_m \left( n_l + n_d + \frac{1}{2} \right)_m}{(1)_{n_l} (1)_m (n_l + 1)_m} \alpha^{2m+n_l} F \left( n_d + m + \frac{1}{2}, n_l + n_d + m + \frac{1}{2}, n_l + m + 1; \alpha^2 \right) \right) \end{aligned}$$

Bien que la plupart des équivalences qui sont établies ici sont évidentes, nous détaillerons celles qui le semblent le moins.

- $$e^{n_l \cdot i(\lambda - \lambda')} \left( \frac{r}{a} e^{i(f-M)} \right)^{n_l} \left( \frac{a'}{r'} e^{-i(f'-M')} \right)^{n_l} = \left( \frac{ra'}{ar'} \right)^{n_l} \frac{e^{in_l \lambda}}{e^{in_l \lambda'}} \frac{e^{in_l f}}{e^{in_l \lambda}} \frac{e^{in_l \pi i}}{e^{in_l f'}} \frac{e^{in_l \lambda'}}{e^{in_l \pi i}} \\ = \left( \frac{ra'}{ar'} \right)^{n_l} \frac{e^{in_l f}}{e^{in_l f'}} \frac{e^{in_l \pi i}}{e^{in_l \pi i}} \\ = \left( \frac{ra'}{ar'} \right)^{n_l} e^{in_l(f+\pi i)} e^{-in_l f + \pi i} \\ = \left( \frac{r}{a} e^{il} \right)^k \left( \frac{a'}{r'} e^{-il'} \right)^k$$
- $$\left( 1 - 2 \frac{r}{r' \Delta_0^2} (\cos \phi - \cos(f+g+h-f'-g'-h')) \right)^{-\frac{1}{2}} = (1 - \frac{r}{r'} 2(\cos \phi - \cos(l-l')) D^{-2})^{-\frac{1}{2}}$$
- $$\frac{(n_d + \frac{1}{2})_m (n_d + \frac{1}{2})_m (n_l + n_d + \frac{1}{2})_m}{(1)_{n_l} (1)_m (n_l + 1)_m} \alpha^{2m+n_l} = \left( \frac{(n + \frac{1}{2})_k (n + \frac{1}{2})_m (n + \frac{1}{2} + k)_m}{(1)_k (1)_m (1+k)_m} \alpha^{2m+k} \right)$$
- $$F(n_d + m + \frac{1}{2}, n_l + n_d + m + \frac{1}{2}, n_l + m + 1; \alpha^2) = F(n + \frac{1}{2} + m, n + \frac{1}{2} + k + m, 1 + k + m; \alpha^2)$$
- $$\frac{1}{a'} \left( \frac{a'}{r'} \right) h^m = r'^{-1} h^m$$

Nous constatons que les expressions finales de [Abu-El-Ata & Chapront, 1975] et du READ\_ME sont identiques. Il nous faut maintenant entrer dans le coeur du travail : vérifier si le code du programme est fidèle à ces développements.

### 4.3 Organigramme

Dans le but de faciliter la comparaison entre ce qu'effectue le code et la formule du READ\_ME, nous allons référencer cette dernière en plusieurs lignes comme suit

$$\frac{a'}{\Delta} = \sum_{n_l \geq 0} \sum_{m \geq 0} (2 - \delta_{n_l}^0) \quad (4.2)$$

$$\left( 1 - 2 \frac{r}{r' \Delta_0^2} (\cos \phi - \cos(f+g+h-f'-g'-h')) \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

$$Re \left( e^{n_l \cdot i(\lambda - \lambda')} \left( \frac{r}{a} e^{i(f-M)} \right)^{n_l} \left( \frac{a'}{r'} e^{-i(f'-M')} \right)^{n_l} \right) \quad (4.4)$$

$$\left( \frac{a'}{r'} \right) h^m \quad (4.5)$$

$$\frac{(n_d + \frac{1}{2})_m (n_d + \frac{1}{2})_m (n_l + n_d + \frac{1}{2})_m}{(1)_{n_l} (1)_m (n_l + 1)_m} \alpha^{2m+n_l} \quad (4.6)$$

$$F \left( n_d + m + \frac{1}{2}, n_l + n_d + m + \frac{1}{2}, n_l + m + 1; \alpha^2 \right) \quad (4.7)$$

De plus, rappelons que la perturbation à calculer est

$$U = a_2 \left[ \frac{1}{\Delta} - \frac{(\vec{r}|\vec{r}')}{|\vec{r}'|^3} \right].$$

En plus de l'inverse de la distance, appelée partie directe, il y a également une deuxième partie dite indirecte. Le code calcule également cette seconde partie que nous référençons et qui sera développée ainsi :

$$- \frac{r' a}{r^2} \cos(\Phi) \tag{4.8}$$

A la figure 4.1, nous avons réalisé un organigramme décrivant la structure globale du code. Tout d'abord, après une phase d'initialisation des variables, le code effectue le développement en inclinaisons de la perturbation directe (4.3) suivi du développement en excentricités de cette même perturbation (4.3). L'étape suivante consiste à calculer les termes  $\left(\frac{ra'}{r'a}\right) \cos(l-l')$  et de  $\left(\frac{ra'}{r'a}\right) \sin(l-l')$  qui seront utilisés dans le calcul de (4.4). Le calcul de  $h$  (4.5) est ensuite réalisé, avant d'être élevé à la puissance  $m$ . La partie indirecte (4.8) est ensuite calculée. Enfin la dernière partie du code consiste en une série de boucles qui d'une part servent à définir les sommes sur  $n_l$  et  $m$  et à élever aux puissances les expressions (4.4) et (4.5) et d'autre part à calculer les expressions (4.6) et (4.7). Les différentes étapes de cet organigramme sont discutées en détail dans les sections suivantes.

Il est à noter que l'ensemble du code (sans la librairie de fonctions MSNam) comporte plus de 1000 lignes. Seuls les lignes les plus importantes seront discutées dans la suite.

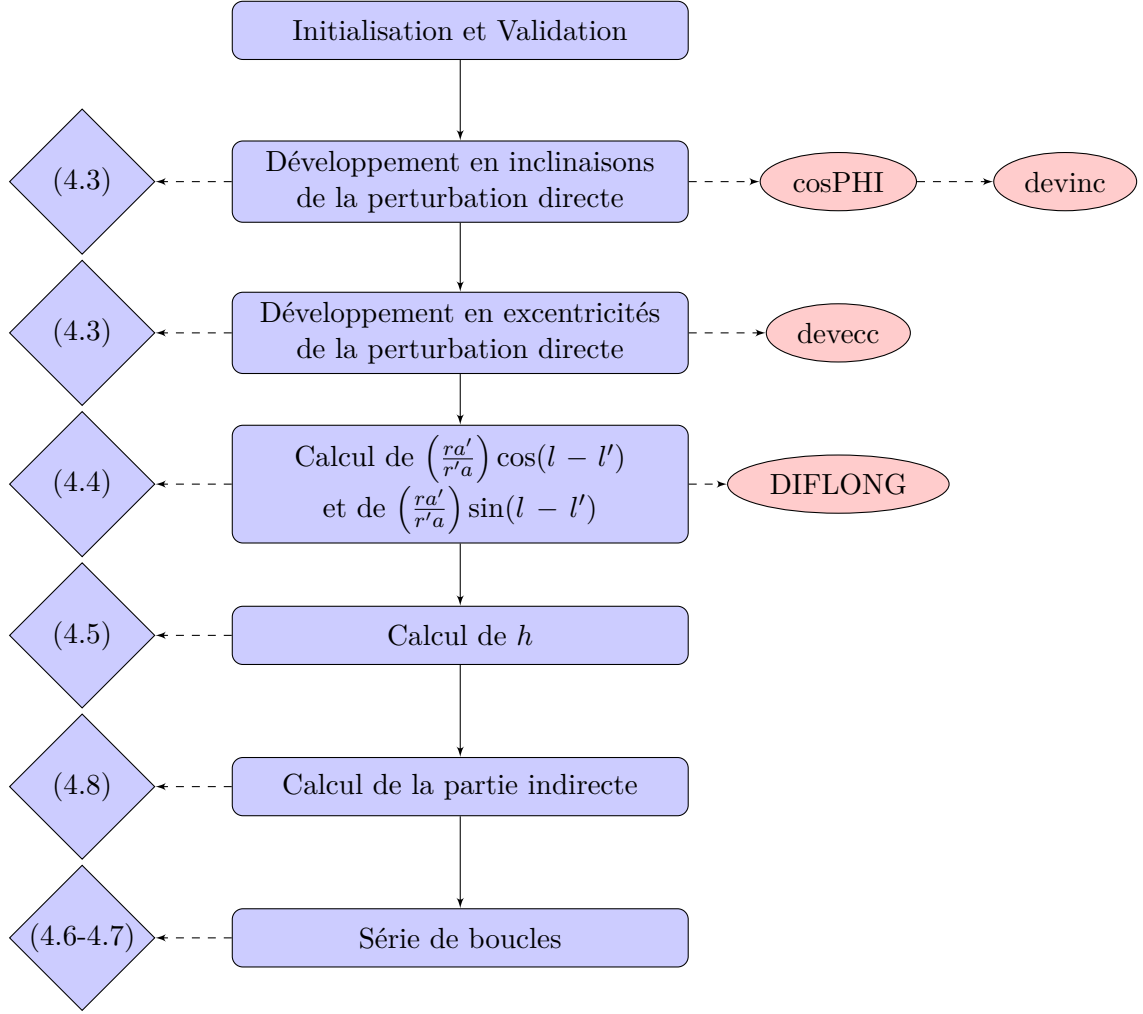


FIGURE 4.1 – Organigramme du programme force-fonction

## 4.4 Initialisation des variables

Avant de rentrer dans la description du code à proprement parler, nous discutons des paramètres à initialiser dans le module *MSparameter* décrit en détails à la section 2.3.2. Pour le problème qui nous occupe, nous fixons les paramètres aux valeurs suivantes :

**MSnvt** = 6

**MSnvp** = 7

**MSnvar** = 13

**MSnamevt** = (' f1', ' f2', ' pi1', ' pi2', ' Om1', ' Om2')

**MSnamevp** = (' s1', ' s2', ' e1', ' e2', ' r1', ' r2', ' D')

**MSaccuracy** =  $10^{-13}$

**MSnwords** = 3

**MSstorelength** = 600 000

**MSnmaxser** = 200

**MSordmax** = 20

**MSnmax** = (63,63,63,63,63,63,31,31,31,31,31,63,31).

Les différentes variables ainsi que leur signification physique sont recensées dans la table 4.2.

Variables trigonométriques	Signification physique
$f_i$	Anomalie vraie
$pi_i$	Longitude du périastre
$Om_i$	Longitude du noeud ascendant

TABLE 4.2 – Variables trigonométriques

Il est à noter que l'argument du périastre  $g_i$  n'est pas une variable trigonométrique du programme. En effet, celle-ci s'obtient aisément par combinaison des autres variables trigonométriques :  $g_i = p_i - Om_i$ .

Variables polynomiales	Signification physique
$s_i$	Sinus de la moitié des inclinaisons
$e_i$	Excentricité
$r_i$	Norme du vecteur position $i$ sur son demi-grand axe
$D$	$\alpha/\Delta_0^2$ (voir table 4.1)

TABLE 4.3 – Variables polynomiales

## 4.5 Le programme force-fonction

### 4.5.1 Arguments en entrée

Dans un premier temps, le programme va lire un fichier dans lequel se trouvent les valeurs suivantes :

1. **select (all./sec/reso)** : Détermine si le programme renvoie les termes séculaires, résonants ou bien les deux ;
2. **type (ecce/cano)** : Détermine si on souhaite que la sortie du programme soit sous forme canonique ou pas, c'est-à-dire exprimé en fonction des excentricités et inclinaisons ou en fonction des éléments de Delaunay (voir section 2.1) ;
3. **sizeorder (.true./.false.)** : .true. si on souhaite que la sortie du programme soit classée par valeur absolue des coefficients, .false. sinon
4. **ordinc (.true./.false.)** : .true. si le développement doit tenir compte des inclinaisons (système planétaire en trois dimensions), .false. sinon (système coplanaire) ;

5. **ordda (.true./.false.)** : .true. si on souhaite un développement en puissance de  $da$ , .false. sinon ( $da = \alpha - \alpha_0$ , l'écartement du rapport en demi-grands axes par rapport à la valeur initiale).
6. **ordtot** : Ordre combiné en excentricités, en  $da$  et en  $\sin i/2$  (limité à 20) ;
7. **orddif** : Différence d'ordres en longitudes moyennes ;
8. **alpha** : Rapport des demi-grands axes  $\frac{a}{a'}$  ;
9. **res\_1 et res\_2** : Identification de la résonance en moyen mouvement

#### 4.5.2 Validation

Nous allons passer en revue les différents tests qui sont effectués au début du programme.

En premier lieu, le programme effectue différents tests pour vérifier si les informations présentes dans le fichier d'entrée sont traitables. Il vérifie notamment que la résonance est bien définie.

Listing 1: Validation

```

if(select.ne.'all.'.and.select.ne.'secu'.and.&
&select.ne.'reso')then
    MSmessage='the selection code (a) is not valid'
    MScharmest(1)=select
    call ERROR
endif

if(type.ne.'ecce'.and.type.ne.'cano') then
    MSmessage='the selection code (a) is not valid'
    MScharmest(1)=type
    call ERROR
endif

if(select.eq.'reso'.and.(res1.lt.0.or.res1.ge.res2)) then
    MSmessage='the resonance (1)/(2) is not defined'
    MSintmess(1)=res1
    MSintmess(2)=res2
    call ERROR
endif

if(ordtot.lt.0.or.ordtot.gt.MSordmax) then
    MSmessage='order in inclinations and eccentricities (1)&
    &is out of bound, it is negative or larger than MSordmax'
    MSintmess(1)=ordtot
    call ERROR
endif

if(orddif.lt.0) then
    MSmessage='multiple of (lam1-lam2) = (1), negative'
    MSintmess(1)=ordecc
    call ERROR
endif

```



### 4.5.3 Détermination de alpha

Lorsque l'option "reso" est sélectionnée, le programme recalcule la valeur de  $\alpha$ , le rapport des demi-grands axes  $\frac{a}{a'}$ . En utilisant la troisième loi de Kepler, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{res_1^2}{res_2^2} &= \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a^3 4\pi^2}{GM} \frac{GM}{a'^3 4\pi^2} = \frac{a^3}{a'^3} \\ \Leftrightarrow \frac{res_1}{res_2} &= \left(\frac{a}{a'}\right)^{\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \left(\frac{res_1}{res_2}\right)^{\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

Le programme vérifie ensuite que  $\alpha$  est bien strictement compris entre 0 et 1, que ni  $res_1$  ni  $res_2$  ne sont négatifs et que  $res_2 > res_1$ .

Listing 2: Calcul de alpha

```
if(select.eq.'reso') alpha=(dfloat(res1)/dfloat(res2))*(dfloat(2)/
dfloat(3))
  if(alpha.lt.0.d0.or.alpha.ge.1.d0 ) then
    MSmessage='alpha is not between 0. and 1.'
    call ERROR
  endif

  if(res1.lt.0.or.res2.le.0.or.res1.ge.res2) then
    MSmessage='res1 = (1) and res2 =(2). One of them is
    negative &
    & or res1 is larger than res2'
    MSintmess(1)=res1
    MSintmess(2)=res2
    call ERROR
  endif
```

### 4.5.4 Détermination de orddif

Le programme calcule *orddif*, c'est-à-dire la différence d'ordre en longitude moyenne, en fonction que nous nous trouvons dans le cas séculaire ou résonant.

Listing 3: Calcul d'orddif

```
if(select.eq.'secu') orddif= ordtot/2
if(select.eq.'reso') orddif=(ordtot)/(res2-res1)*res2
```

#### 4.5.5 Développement en inclinaisons de la perturbation directe

Le développement de la perturbation directe s'effectue via l'appel de deux sous-routines. Regardons plus en détail ce qu'elles font.

Listing 4: Développement en inclinaisons de la perturbation directe

```
call cosPHI(cPHI,ordi)
call devinc(cPHI,U,ordi)
```

#### La fonction cosPHI(cPHI,ordi,type)

La fonction cosPHI a pour arguments *ordi* qui contient l'ordre en inclinaisons souhaité pour le développement et *cPHI* qui constitue la sortie de la fonction. Le but de cette fonction va être

de calculer pour  $i=1,2$ , les composantes de  $r_i$ , comme décrites à l'équation (2.9), divisées par  $r_i$  afin d'obtenir  $\cos \Phi = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) / r_1 r_2$ . Les composantes (divisées par  $r_i$ )

$$\begin{cases} x_i &= \cos(f_i + p_i) + 2 \sin\left(\frac{i_i}{2}\right)^2 \sin(f_i + g_i) \sin(h_i) \\ y_i &= \sin(f_i + p_i) - 2 \sin\left(\frac{i_i}{2}\right)^2 \sin(f_i + g_i) \cos(h_i) \\ z_i &= 2 \sin\left(\frac{i_i}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{i_i}{2}\right)^2 \sin(f_i + g_i), \end{cases}$$

sont codées sous la forme

$$\begin{cases} x_i &= \cos(f_i + p_i) - \sin\left(\frac{i_i}{2}\right)^2 \cos(f_i + p_i) + \sin\left(\frac{i_i}{2}\right)^2 \cos(f_i + p_i - 2 Om_i) \\ y_i &= \sin(f_i + p_i) - \sin\left(\frac{i_i}{2}\right)^2 \sin(f_i + p_i) - \sin\left(\frac{i_i}{2}\right)^2 \sin(f_i + p_i - 2 Om_i) \\ z_i &= \left(1 - \sin\left(\frac{i_i}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} 2 \sin\left(\frac{i_i}{2}\right) \sin(f_i + p_i - Om_i). \end{cases}$$

Une simple manipulation de fonctions trigonométriques (règle de Simpson) nous permet de constater que les deux expressions sont équivalentes. Notons que, dans l'implémentation du code, l'utilisation de `arg(INDEXTRIG())` permet de définir la valeur des arguments des variables trigonométriques tandis que `exp(INDEXTRIG())` permet de définir la valeur des exposants des variables polynomiales. Ces variables sont construites en fonction de leur puissance en moitié des inclinaisons, ce qui signifie qu'en  $x_1(0)$  se trouveront les termes en  $\sin(\frac{i_1}{2})^0$  tandis qu'en  $x_1(2)$  seront ceux en  $\sin(\frac{i_1}{2})^2$ .

Listing 5: Formation de  $x_1$ ,  $y_1$  et  $z_1$

```

arg(INDEXTRIG(' f1'))=1
arg(INDEXTRIG(' pi1'))=1
call STORE(x1(0),0,arg,exp, 1.d0)
call STORE(y1(0),1,arg,exp, 1.d0)
if(ordi.gt.0) then
  exp(INDEXPOL(' s1'))=2
  call STORE(x1(2),0,arg,exp,-1.d0)
  call STORE(y1(2),1,arg,exp,-1.d0)
  arg(INDEXTRIG(' Om1'))=-2
  call STORE(x1(2),0,arg,exp, 1.d0)
  call STORE(y1(2),1,arg,exp,-1.d0)
  arg(INDEXTRIG(' Om1'))=-1
  exp(INDEXPOL(' s1'))=1
  call STORE(z1(1),1,arg,exp, 2.d0)
  exp(INDEXPOL(' s1'))=0
  arg(INDEXTRIG(' Om1'))=0

  call CONSTANT(cI2(0),1.d0)
  call CONSTANT(cI2(2),-1.d0)
  call XMON(cI2(2),' s1',2)
  call POWER(cI2,0.5d0,2*ordi)

  call V_renamee(temp,z1,2*ordi)
  call V_PROD(temp,cI2,z1,1.d0,2*ordi)
  call V_ERASE(temp,2*ordi)
  call V_ERASE(cI2,2*ordi)
endif

arg(INDEXTRIG(' f1'))=0
arg(INDEXTRIG(' pi1'))=0

```

La sous-routine réalise enfin la construction de  $cPHI = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$  (cosinus de l'angle entre les vecteurs  $r$  et  $r'$ ) qui est immédiate.

Listing 6: Formation de  $cPHI$

```

call V_PROD(x1,x2,temp,1.d0,2*ordi)
call V_PROD(y1,y2,temp,1.d0,2*ordi)
call V_PROD(z1,z2,temp,1.d0,2*ordi)
call V_ERASE(x1,2*ordi)
call V_ERASE(x2,2*ordi)
call V_ERASE(y1,2*ordi)
call V_ERASE(y2,2*ordi)
call V_ERASE(z1,2*ordi)
call V_ERASE(z2,2*ordi)

do k=0,ordi
  call COPY(temp(2*k),cPHI(k))
enddo
call V_ERASE(temp,2*ordi)

```

### La fonction devinc(*cPHI*,*U*,*ordi*)

La fonction devinc a pour argument *cPHI* calculé précédemment et *ordi* qui est l'ordre en inclinaisons. Le but de cette fonction va être de construire  $U = \left(1 - 2\frac{r}{r'}\frac{1}{\Delta_0^2}cPHI\right)^{-1/2}$  qui sera la sortie de la fonction. Rappelons que  $D = \frac{\alpha}{\Delta_0^2}$  de (4.3). La fonction commence par construire  $U(k) = -2\frac{r}{a}\frac{a'}{r'}cPHI$  pour *k* allant de 1 jusqu'à l'ordre en inclinaisons.

Listing 7: devinc

```
do k=0,ordi
  call ACUM(cPHI(k),U(k),-2.d0)
  call XMON(U(k),' r1 ',1)
  call XMON(U(k),' r2 ', -1)
enddo
```

Ensuite,  $U(0)$  est remplacé par 1, tandis que tous les autres ordres sont multipliés par  $D$ . L'ensemble est calculé à la puissance  $-0.5$  voir équation (4.3)) pour obtenir  $(1 - 2D\frac{r}{r'}cPHI)^{-1/2} = \left(1 - 2\frac{\alpha}{\Delta_0^2}\frac{r}{r'}cPHI\right)^{-1/2}$  qui est stocké dans  $U$ .

Listing 8: devinc

```
call ERASE(U(0))
call CONSTANT(U(0),1.d0)
do k=1,ordi
  call XMON(U(k),' D ',1)
  call POWER(U,-0.5d0,ordi)
enddo
```

### 4.5.6 Développement en excentricités

#### La fonction devecc(*U*,*INV*,*R*,*R2*,*ordtot*)

Cette fonction va développer  $U$  en série des excentricités  $e_1$  et  $e_2$  en utilisant la sous-routine *dev2B\_fr* qui remplace une fonction par son développement en excentricités et anomalies moyennes. Le résultat est placé dans *INV*. Cette fonction définira et calculera également  $R = \frac{ra'}{ar'}$  et  $R_2 = \frac{a'}{r'}$ . Au terme de ces différents points, nous avons calculé et développé l'équation (4.3).

Listing 9: Développement en excentricités de U

```
call devecc(U,INV,R,R2,ordtot)
call V_ERASE(U,ordi)
```

#### 4.5.7 Calcul de $(\frac{ra'}{r'a}) \cos(l - l')$ et de $(\frac{ra'}{r'a}) \sin(l - l')$

La fonction DIFLONG va calculer les quantités  $(\frac{r}{r'}) \cos(l - l')$  et  $(\frac{r}{r'}) \sin(l - l')$  et les stocker respectivement dans les variables **COS** et **SIN**. A cette fin, la fonction commence par créer  $\frac{r}{a} \cos(f_1 + pi_1)$ ,  $\frac{r}{a} \sin(f_1 + pi_1)$ ,  $\frac{a'}{r'} \cos(f_2 + pi_2)$  et  $\frac{a'}{r'} \sin(f_2 + pi_2)$ . Remarquons que  $l_i = f_i + pi_i = f_i + g_i + h_i$ . La sous-routine utilisera ensuite la fonction *dev2B\_fr* afin d'en effectuer le développement en excentricités et anomalies moyennes. Enfin, elle construira les variables de sortie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{ra'}{r'a}\right) \cos(l - l') &= \left(\frac{ra'}{r'a}\right) [\cos(l) \cos(l') + \sin(l) \sin(l')] \\ \left(\frac{ra'}{r'a}\right) \sin(l - l') &= \left(\frac{ra'}{r'a}\right) [\sin(l) \cos(l') - \cos(l) \sin(l')] . \end{aligned}$$

Ces expressions seront utilisées dans le calcul de (4.4).

**Listing 10: Calcul de  $(\frac{r}{r'}) \cos(l - l')$  et de  $(\frac{r}{r'}) \sin(l - l')$**

```
call DIFLONG(COS,SIN,ordtot)
```

#### 4.5.8 Calcul de $h$

Ici le calcul de  $h$  est effectué. A savoir  $(\frac{ra'}{ar'})^2 - 1$ . Remarquons que nous effaçons  $h(0)$  afin de soustraire 1 à  $R^2 = (\frac{r_1}{r_2})^2 = (\frac{ra'}{ar'})^2$ .

**Listing 11: Calcul de  $h$**

```
call V_PROD(R,R,h,1.d0,ordtot)
call ERASE(h(0))
call V_ERASE(R,ordtot)
```

#### 4.5.9 Calcul de la partie indirecte

Nous allons maintenant nous attarder sur le calcul de la partie indirecte de la perturbation via la sous-routine indirectPERT.

**Listing 12: indirectPERT**

```
call indirectPERT(cPHI,RES,alpha,ordtot,ordi,nda)
```

Cette fonction va dans un premier temps calculer  $-\frac{ra'}{r^2} cPHI$  selon (4.8).

**Listing 13: Partie indirecte**

```

do k=0,ordi
  call ACUM(cPHI(k),RES(0,k),-alpha)
  call XMON(RES(0,k),' r1 ', 1)
  call XMON(RES(0,k),' r2 ', -2)
enddo

```

Ensuite, elle va effectuer un développement de cette expression en série des excentricités  $e1$  et de  $e2$  à l'aide de la sous-routine *dev2B\_fr*. Le résultat sera placé dans la variable RES. Une dernière chose à mentionner est le changement de certaines variables, en effet, la variable  $r1$  devient  $da$  tandis que  $r2$  disparaît.

**Listing 14: changement de variables**

```

call CHANGE_NAME(' f ', ' f2 ')
call CHANGE_NAME(' r1 ', ' da ')
call CHANGE_NAME(' r ', ' ')
call CHANGE_NAME(' e ', ' e2 ')

```

**4.5.10 Analyse des boucles**

La suite de programme consiste en une série de boucles emboîtées. Afin de clarifier la structure qui va suivre, la figure 4.2 est un "Flowchart" de ces différentes boucles. Nous pouvons constater que le programme commence par une boucle sur l'ordre en inclinaisons dans laquelle il définira à chaque itération l'ordre en excentricités comme étant l'ordre total moins deux fois l'ordre en inclinaisons de l'itération en cours. Cette première boucle en contient une deuxième sur *orddif*, le multiple de  $l - l'$  au cours de laquelle l'expression (4.4) est calculée. Dans cette boucle se trouve ensuite une boucle sur l'ordre en excentricités qui sert à calculer l'expression (4.5). La boucle suivante va simplement sélectionner les termes résonants et initialiser la valeur jusqu'à laquelle ira la boucle suivante. Dans l'avant-dernière boucle le calcul de (4.6) est effectué tandis que la dernière boucle développera (4.7). Dans la suite, nous allons passer au travers du code de chacune des boucles et sous-boucles que nous venons de décrire brièvement en faisant le lien entre ce qu'elles font et l'expression de l'inverse de la distance que nous souhaitons construire.

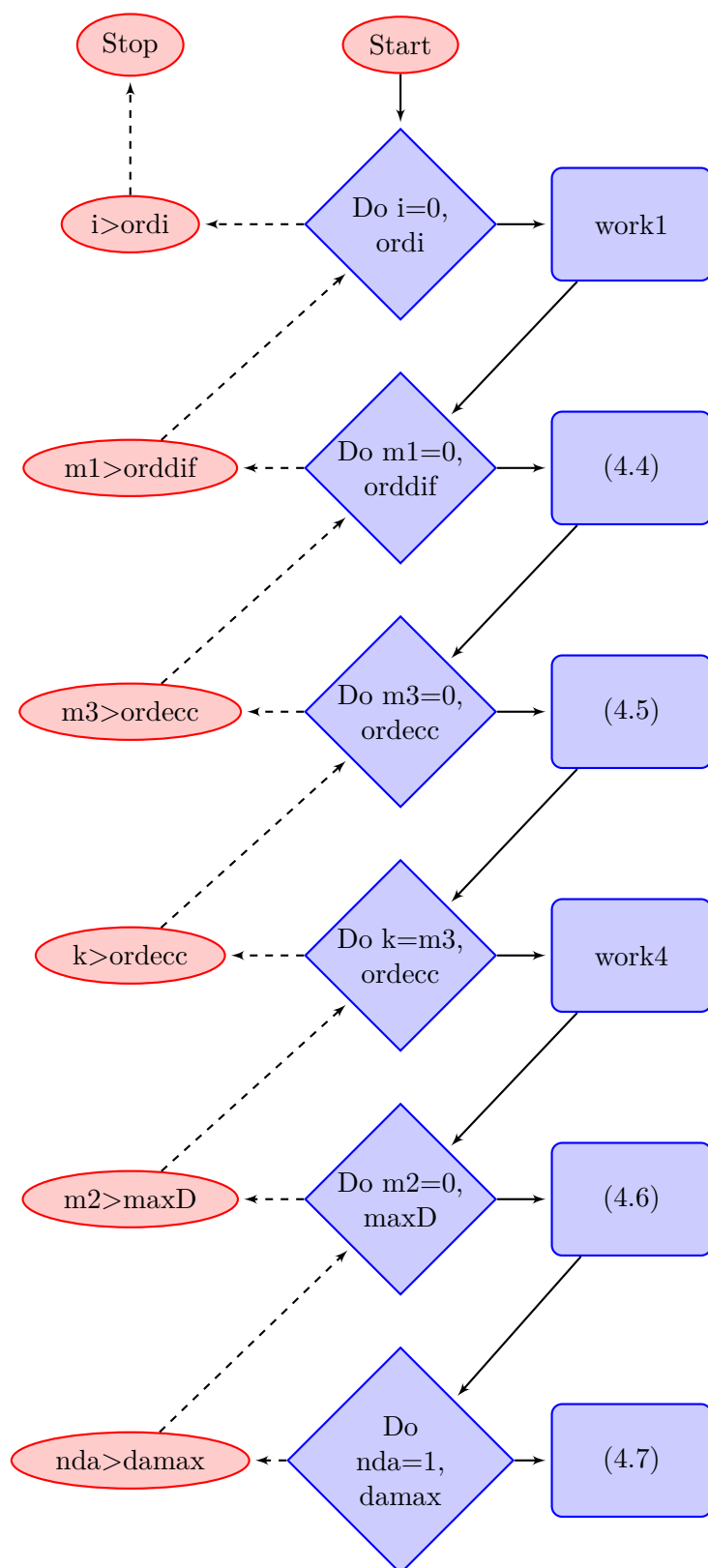


FIGURE 4.2 – Flowchart des boucles du calcul de la partie indirecte

## Boucle sur l'ordre en inclinaisons

Le programme commence par définir l'ordre en excentricités comme étant la différence entre l'ordre total et deux fois l'ordre en inclinaisons. Nous initialisons également une série *COSM* à 1 et enfin nous assignons à *SINM*(0) la valeur 0. Ceci n'a aucune incidence pour la première itération. Cependant, la valeur de *SINM*(0) sera amenée à évoluer au cours des boucles internes.

Listing 15: Boucle sur l'ordre en inclinaisons

```
ordecc=ordtot-2*i
call CONSTANT(COSM(0),1.d0)
SINM(0)=0
do m3=0,ordecc
```

## Boucle sur *orddif*

La boucle suivante va s'effectuer sur *orddif*. Un des objectifs va être d'effectuer un développement de  $\left(\frac{r}{r'}\right)^{m1} \cos(m1(l-l'))$ . Nous commençons par stocker dans U le produit entre *INV* et *COSM*. Lors de la première itération, *COSM* vaut 1 et *INV* contient le développement en excentricités de  $(1 - 2D\frac{r}{r'}cPHI)^{-1/2}$ .

Listing 16: U = INV \* COSM

```
call V_PROD(COSM,INV(0,i),U,1.d0,ordecc)
```

Le programme va maintenant effectuer une suite d'opérations dont le but va être d'obtenir les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} COSM &= COSM_{init} \left( \frac{r_1}{r_2} \right) \cos(l-l') - SINM_{init} \left( \frac{r_1}{r_2} \right) \sin(l-l'), \\ SINM &= COSM_{init} \left( \frac{r_1}{r_2} \right) \sin(l-l') + SINM_{init} \left( \frac{r_1}{r_2} \right) \cos(l-l'), \end{aligned}$$

avec  $COSM_{init}$  et  $SINM_{init}$  étant respectivement les valeurs de *COSM* et *SINM* à l'entrée de la boucle. Ces opérations nous servent à calculer l'expression (4.4)



Listing 17: Construction de COSM et SINM

```
call V_PROD(COSM,COS,temp, 1.d0,ordecc)
call V_PROD(SINM,SIN,temp,-1.d0,ordecc)
call V_PROD(COSM,SIN,temp2, 1.d0,ordecc)
call V_PROD(SINM,COS,temp2, 1.d0,ordecc)
call V_ERASE(COSM,ordecc)
call V_ERASE(SINM,ordecc)
call V_renamee(temp,COSM,ordecc)
call V_renamee(temp2,SINM,ordecc)
call CONSTANT(hm(0),1.d0)
```

### Boucle sur l'ordre en excentricités

Nous allons maintenant entamer une boucle qui va itérer avec  $m3$  de zéro jusqu'à l'ordre en excentricités. Le but de cette boucle va être de calculer  $h^m$ .

Listing 18: Construction de  $h^m$

```
if(m3.ge.1) then
  call V_PROD(h,hm,temp,1.d0,ordecc)
  call V_ERASE(hm,ordecc)
  call V_RENAMEE(temp,hm,ordecc)
endif
call V_PROD(U,hm,temp,1.d0,ordecc)
call V_PROD(temp,R2,temp2,1.d0,ordecc)
call V_ERASE(temp,ordecc)
```

Nous pouvons d'ores et déjà constater que le "if" n'a d'autre but que de sauter la première itération de la boucle. Afin de mieux comprendre ce que font ces quelques lignes de code, voici les valeurs prises par les différents paramètres lors des trois premières itérations de cette boucle. Nous appellerons  $temp_0$  et  $temp_{2,0}$  les valeurs initiales que prennent  $temp$  et  $temp_2$  avant d'entrer dans la boucle en excentricités.

### Première itération

$$\begin{aligned}temp &= U.hm + temp = U.1 + temp_0 \\temp_2 &= temp_{2,0} + R_2temp = temp_{2,0} + R_2temp_0 + R_2U \\temp &= 0\end{aligned}$$

### Deuxième itération

$$\begin{aligned}temp &= h_m h = h \\hm &= 0 \\hm &= h \\temp &= 0 \\temp &= U.h \\temp_2 &= temp_{2,0} + R_2 temp_0 + R_2 U + R_2 U h \\temp &= 0\end{aligned}$$

### Troisième itération

$$\begin{aligned}temp &= h_m h = h^2 \\hm &= 0 \\hm &= h^2 \\temp &= 0 \\temp &= U.h^2 \\temp_2 &= temp_{2,0} + R_2 temp_0 + R_2 U + R_2 U h + R_2 U.h^2 \\temp &= 0\end{aligned}$$

En continuant ainsi, nous formons l'expression

$$temp_2 = temp_{2,0} + R_2 temp_0 + \sum_{m_3=1}^{ord ecc} R_2 U h^{m_3}.$$

Les variables  $temp_0$  et  $temp_{2,0}$  étant nuls à l'entrée dans la boucle, nous avons bien formé l'expression recherchée (4.5).

$$\sum_{m_3=1}^{ord ecc} R_2 U h^{m_3},$$

ce qui correspond à l'expression (4.5).

### Boucle de $m_3$ jusqu'à l'ordre en excentricités

Cette nouvelle boucle va également itérer jusqu'à l'ordre en excentricités, mais son argument itératif,  $k$ , a comme plus petite valeur l'argument itératif de la boucle précédente, c'est-à-dire  $m_3$ .

Le programme commence par sélectionner les termes résonants dans  $temp_2$ .  $ord da$  est une des valeurs lues en entrée du programme. Sa valeur vaut 1 si on souhaite un développement en puissances de  $da = \alpha - \alpha_0$ , 0 sinon. Dans le cas qui nous intéresse,

*ordda* aura une valeur de 1 et donc, *damax* vaudra  $ordtot - 2i - k$  où nous rappelons que *i* est l'argument de la première boucle qui va jusque l'ordre en inclinaisons et *k* est celui de la boucle qui va jusque l'ordre en excentricités. Ensuite il s'agit de déterminer la valeur de *maxD*, la valeur maximale de la boucle suivante. Concrètement, *maxD* prend la valeur de l'exposant maximal de *D*.

Listing 19: Boucle sur  $m_3$

```
call select_terms(temp2(k),select,res1,res2)
if(temp2(k).eq.0) goto 800

damax=0
if(ordda) damax=ordtot-2*i-k

maxD=0

do n=1,NBTERM(temp2(k))
  call FETCH(temp2(k),n,sc,arg,exp,coef)
  indexD=INDEXPOL(' D')
  if(maxD.lt.exp(indexD)) maxD=exp(indexD)
enddo
```

### Boucle jusqu'à *maxD*

Dans cette boucle, l'objectif est de construire  $C_{m_2,m_3}^{m_1} = \frac{(m_2+\frac{1}{2})_{m_1}(m_2+\frac{1}{2})_{m_3}(m_1+m_2+\frac{1}{2})_{m_3}}{(1)_{m_1}(1)_{m_3}(m_1+1)_{m_3}}$ , afin de former (4.6). Nous rappelons que la notation utilisée ici représente la factorielle croissante telle que nous l'avons définie au chapitre précédent (3.2.2). Nous en profitons également pour définir une fonction qui sera essentielle dans la suite du code, la fonction Gamma.

**Définition 4.5.1.**  $\Gamma : z \rightarrow \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$

La fonction Gamma est intéressante car elle est utilisée pour exprimer la factorielle. En effet, une intégration par parties nous montre que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

De cela, et du fait que  $\Gamma(1) = 1$ , on peut déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!.$$

En utilisant ce que nous venons de voir concernant la fonction Gamma, nous pouvons exprimer la factorielle croissante comme

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}.$$

C'est en utilisant cette dernière propriété que le programme calcule  $C_{m_2,m_3}^{m_1}$ . En effet, il suffit de réexprimer les factorielles croissantes sous forme de fonctions Gamma afin

d'obtenir

$$\begin{aligned}
C_{m_2, m_3}^{m_1} &= \frac{(m_2 + \frac{1}{2})_{m_1} (m_2 + \frac{1}{2})_{m_3} (m_1 + m_2 + \frac{1}{2})_{m_3}}{(1)_{m_1} (1)_{m_3} (m_1 + 1)_{m_3}} \\
&= \frac{\Gamma(m_1 + m_2 + \frac{1}{2})}{\Gamma(m_2 + \frac{1}{2})} \frac{\Gamma(m_2 + m_3 + \frac{1}{2})}{\Gamma(m_2 + \frac{1}{2})} \frac{\Gamma(m_1 + m_2 + m_3 + \frac{1}{2})}{\Gamma(m_1 + m_2 + \frac{1}{2})} \\
&\quad \frac{\Gamma(m_1 + 1)}{\Gamma(m_1 + m_3 + 1)} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(m_1 + 1)} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(m_3 + 1)} \\
&= \left[ \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(m_2 + \frac{1}{2})} \right]^2 \frac{\Gamma(m_2 + m_3 + \frac{1}{2})}{\Gamma(m_3 + 1)} \frac{\Gamma(m_1 + m_2 + m_3 + \frac{1}{2})}{\Gamma(m_1 + m_3 + 1)}
\end{aligned}$$

Dans le code qui va suivre, la sous-routine "rat\_gam" va être utilisée. Celle-ci renvoie le résultat  $rat\_gam(a, b) = \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2})}{\Gamma(b)}$ . C'est grâce à cette fonction que nous allons calculer la valeur de  $C_{m_2, m_3}^{m_1} \alpha$ . De plus, le programme va stocker dans "sum" l'expression

$$coef2 = coef \frac{\Gamma(m_2 + m_3 + \frac{1}{2})}{\Gamma(m_3 + 1)} \frac{\Gamma(m_1 + m_2 + m_3 + \frac{1}{2})}{\Gamma(m_1 + m_3 + 1)} \left[ \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(m_2 + \frac{1}{2})} \right]^2 2\alpha^{2m_3 + m_2 + m_1}.$$

Un autre point important à noter est à ligne qui nous dit que si  $m_1$  est différent de zéro, alors on double le coefficient  $coef2$ . Cette ligne retranscrit  $(2 - \delta_0^{m_1})$  c'est-à-dire l'équation (4.2). Le changement de variables suivant est également réalisé :

$$\begin{aligned}
n_1 &= m_2 + m_3 \\
n_2 &= m_1 + m_2 + m_3 \\
n_3 &= m_1 + m_3 + 1.
\end{aligned}$$

Listing 20: Construction de  $C_{m_2, m_3}^{m_1}$

```

do n=1, NBTERM(temp2(k))
  call FETCH(temp2(k), n, sc, arg, exp, coef)
  if(exp(INDEXPOL(' D')).eq.m2) then
    exp(INDEXPOL(' D'))=0
    coef2=coef*rat_gam(m2+m3, m3+1)*&
    rat_gam(m1+m2+m3, m1+m3+1)/&
    rat_gam(m2, 1)**2*alpha**(2*m3+m2+m1)
    if(m1.ne.0) coef2=2.d0*coef2

    call store(sum, sc, arg, exp, coef2)
  endif
enddo

n1=m2+m3
n2=m1+m2+m3
n3=m1+m3+1

```

La construction de l'expression (4.7) nécessite finalement la sous-routine "ghyp" pour le calcul de la fonction hypergéométrique, selon laquelle  $ghyp(n_1, n_2, n_3, z, rel) = F\left(n_1 + \frac{1}{2}, n_2 + \frac{1}{2}, n_3, z\right)$  avec une précision relative de "rel".

**Listing 21: Construction de  $F$**

```
nda=0
call ACUM(sum, RES(k,i), ghyp(n1,n2,n3,alpha**2,rel))

fac=1.d0
A(0)=1.d0
two=2.d0
```

### Boucle jusqu'à $damax$

Dans cette dernière boucle, nous souhaitons former les coefficients en puissance de  $da$ . À cette fin, il nous faut dériver  $\mathcal{G} = \alpha^{2m_3+m_1} F\left(n_1 + \frac{1}{2}, n_2 + \frac{1}{2}, n_3, z\right)$  par rapport à  $da$ . Nous pouvons exprimer les dérivées  $n$ -ièmes sous la forme de la somme suivante

$$\frac{d^n \mathcal{G}}{d\alpha^n} = \sum_{i=0}^n A_i^n \alpha^{2m_3+m_1+2i-n} \mathcal{F}^{(i)} \quad (4.9)$$

où  $\mathcal{F}^{(i)}$  est la  $i$ -ième dérivée de la fonction hypergéométrique par rapport à son argument  $\alpha^2$  et où les  $A_i^n$  sont des coefficients numériques que l'on peut obtenir à partir de la relation de récurrence suivante :

$$A_0^{n+1} = (k-n)A_0^n \quad (4.10)$$

$$A_i^{n+1} = 2A_{i-1}^n + (k-n+2i)A_i^n \text{ Pour } i \leq i \leq n \quad (4.11)$$

$$A_{n+1}^{n+1} = 2A_n^n. \quad (4.12)$$

Enfin les dérivées  $\mathcal{F}^{(i)}$  sont calculées selon

$$\mathcal{F}^{(i)} = \frac{d^i F(a, b, c; z)}{dz^i} = \frac{(a)_i (b)_i}{(c)_i} F(a+i, b+i, c+i, z). \quad (4.13)$$

Regardons à présent comment sont implémentées ces opérations dans le code.

**Listing 22: Dérivée de F**

```

fac=fac/dfloat(nda)
call CONSTANT(serda,fac)
call XMON(serda,' da',nda)
A(nda)=two*A(nda-1)

nder=nda
valF=ghyp(n1+nder,n2+nder,n3+nder,alpha**2,rel)&
      *A(nda)*alpha**(2*nder-nda)&
      *rat_gam(n1+nder,1)*rat_gam(n2+nder,n3+nder)&
      /rat_gam(n1,1)/rat_gam(n2,n3)
call PROD(sum,serda,res(k+nda,i),valF)

do nder=nda-1,1,-1
      A(nder)=two*A(nder-1)+&
      &dfloat(2*m3+m2+m1-nda+1+2*nder)*A(nder)
      valF=ghyp(n1+nder,n2+nder,n3+nder,alpha**2,rel)&
      *A(nder)*alpha**(2*nder-nda)&
      *rat_gam(n1+nder,1)*rat_gam(n2+nder,n3+nder)&
      /rat_gam(n1,1)/rat_gam(n2,n3)
      call PROD(sum,serda,res(k+nda,i),valF)
enddo

nder=0
A(0)=dfloat(2*m3+m2+m1-nda+1)*A(0)
valF=ghyp(n1,n2,n3,alpha**2,rel)*A(0)*alpha**(2*nder-nda)
call PROD(sum,serda,RES(k+nda,i),valF)

```

Tout d'abord, il multiplie *serda* par  $da^{nda}$ . Voici la valeur que prend *valF* à la sixième ligne de ce code.

$$\begin{aligned}
 valF = & F\left((n_1 + nder) + \frac{1}{2}, (n_2 + nder) + \frac{1}{2}, (n_3 + nder), \alpha^2\right) A(nda) \alpha^{2nder-nda} \\
 & \frac{\Gamma\left((n_1 + nder) + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left((n_2 + nder) + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(n_3 + nder)} \frac{\Gamma(n_3)}{\Gamma\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

Les fonctions Gamma sont utilisées pour calculer les factorielles croissantes de l'équation (4.13). La ligne suivante effectue  $res(k + nda, i) = res(k + nda, i) + valF * sum * serda$ . Ainsi, à ce stade, nous venons d'effectuer le premier pas dans le calcul des relations de récurrence dont le but est de calculer les coefficients  $A_i^n$ . Cette première partie de la boucle vient donc d'effectuer le premier pas dans le calcul des relations de récurrence dont le but est de calculer les coefficients  $A_i^n$ . Ce que nous allons voir maintenant est la calcul du reste de ces coefficients dans une boucle.

Dans les lignes suivantes, les coefficients  $A_i^n$  sont calculés en utilisant les relations de récurrence (4.10), (4.11), (4.12). En effet ce code va boucler de  $nda - 1$  jusque 1 par pas de -1 en réalisant

$$A(nder) = 2A(nder - 1) + (2m_3 + m_2 + m_1 - nda + 1 + 2nder)A(nder).$$

ce qui correspond à l'équation (4.11). Ensuite  $valF$  est calculé selon

$$valF = F\left((n_1 + nder) + \frac{1}{2}, (n_2 + nder) + \frac{1}{2}, (n_3 + nder), \alpha^2\right) A(nder) \alpha^{2nder - nda} \\ \frac{\Gamma\left((n_1 + nder) + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} \frac{\Gamma\left((n_2 + nder) + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n_3 + nder)} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma(n_3)}{\Gamma\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)}.$$

Comme précédemment nous effectuons  $res(k + nda, i) = res(k + nda, i) + valF * sum * serda$ . Enfin définissons  $A(0)$  à chaque étape de notre boucle sur  $nda$  comme étant  $A(0) = A(0) * (2m_3 + m_2 + m_1 - nda + 1)$  afin de traduire l'équation (4.10). Enfin, les deux dernières lignes du code donnent l'expression recherchée (4.9).

La toute dernière partie du code consiste simplement à afficher et à sauvegarder les résultats dans un fichier. Tout au long de cette section, nous avons fait le lien entre ce que le READ\_ME énonçait et son implémentation concrète dans le programme. Au terme de cette étude, nous concluons que le code est parfaitement en accord avec le READ\_ME et réalise donc bien, sans aucune erreur, le développement proposé par [Abu-El-Ata & Chapront, 1975].

## Chapitre 5

# Premières applications

Dans ce chapitre, nous allons étudier la dynamique de deux systèmes extrasolaires en résonance en moyen mouvement : HD-108874 et HD-60532. Dans les systèmes résonants, le rapport des demi-grands axes  $\alpha$  varie au cours du temps. Il serait donc plus opportun d'employer un développement de la perturbation qui prend en compte cette variation comme celui proposé par [Abu-El-Ata & Chapront, 1975]. L'objectif de ce chapitre est de comparer les résultats que nous donne un tel développement avec ceux obtenus via un développement ne prenant pas en compte cette variation du rapport des demi-grands axes.

### 5.1 Les systèmes HD-108874 et HD-60532

Nous choisissons d'étudier l'évolution à long terme des des deux systèmes extrasolaires HD-108874 et HD-60532. Les paramètres de ces deux systèmes sont donnés à la table 5.1. Le système HD-109974 est en résonance en moyen mouvement 4 : 1 tandis que HD-60532 est en résonance 3 : 1. Rappelons qu'un système est dit en résonance en moyen mouvement

Paramètres	HD-108874	HD-60532
$m_0$ ( $M_{\odot}$ )	0.95	1.44
$m_1$ $M_{Jup}$	1.34	3.1548
$m_2$ $M_{Jup}$	1.064	7.4634
$a_1$ UA	1.053	0.7606
$a_2$ UA	2.77	1.5854
$e_1$	0.128	0.278
$e_2$	0.273	0.038
$\omega_1$ (deg)	219.49	352.83
$\omega_2$ (deg)	10.0	119.49
$M_1$ (deg)	0.0	21.950
$M_2$ (deg)	267.43	197.53

TABLE 5.1 – Paramètres des systèmes HD-108874 et HD-60532. Source : [The Extrasolar Planets Encyclopaedia]



A titre d'information, les premiers ordres du développement en série calculé par le programme force-fonction est donné ici pour la résonance 4 : 1. C'est ce développement qui sera utilisé pour le système HD-108874. Pour chaque terme de la série, sont renseignés les coefficients de ses variables trigonométriques ( $\lambda_i, \varpi_i, \Omega_i$ ), les exposants de ses variables polynomiales ( $S_i, E_i, da$ ) et son coefficient. L'ordre des termes correspond à la somme des exposants de ses variables polynomiales.

data.txt

#### TERMS OF THE FORCE FUNCTION OF THE PLANETARY THREE BODY PROBLEM

for the ratio  $a_{\{1\}}/a_{\{2\}} = 0.3968502629920499D+00$

for the resonance 1  $\lambda_{\{1\}} - 4 \lambda_{\{2\}}$

maximum order in inclinations, eccentricities and da = 12

$\lambda$  = mean longitude,  $\pi$  = longitude of pericenter,  $\Omega$  = longitude of node

$S = \sqrt{2Q/L}$   $E = \sqrt{2P/L}$

ORDER = 0

SERIES Pert 0  
NUMBER OF TERMS : 1

	$\lambda$	$\lambda$	$\pi$	$\pi$	$\Omega$	$\Omega$	$S$	$S$	$E$	$E$	$da$		COEF
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1043294707932081D+01

ORDER = 1

SERIES Pert 1  
NUMBER OF TERMS : 1

	$\lambda$	$\lambda$	$\pi$	$\pi$	$\Omega$	$\Omega$	$S$	$S$	$E$	$E$	$da$		COEF
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0		
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0.2404518394062123D+00

ORDER = 2

SERIES Pert 2  
NUMBER OF TERMS : 4

	$\lambda$	$\lambda$	$\pi$	$\pi$	$\Omega$	$\Omega$	$S$	$S$	$E$	$E$	$da$		COEF
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0		
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0.4294692525117807D+00
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0.8153027232277681D-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0.8153027232277681D-01
cos	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	1	0	0	-0.7921217394850259D-01

ORDER = 3

SERIES Pert 3  
NUMBER OF TERMS : 8

	lam	lam	pi1	pi2	Om1	Om2	S1	S2	E1	E2	da		COEF
cos	1	-4	1	2	0	0	0	0	1	2	0	0	-0.3516980036436479D+01
cos	1	-4	2	1	0	0	0	0	2	1	0	0	0.1616361630465884D+01
cos	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	1	1	0	-0.7307932824505758D+00
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0.5558945783799579D+00
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0.5558945783799579D+00
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0.4012894281893332D+00
cos	1	-4	0	3	0	0	0	0	0	3	0	0	0.3719806321055811D+00
cos	1	-4	3	0	0	0	0	0	3	0	0	0	-0.2444227545814586D+00

## 5.2 Equations hamiltoniennes

L'évolution à long terme des systèmes extrasolaires est obtenue par l'intégration des équations hamiltoniennes. Pour rappel, le développement de l'Hamiltonien obtenu par le programme force-fonction est le suivant.

$$H = -\frac{G^2 m_0^2 m_1^3}{2L_1^2} - \frac{G^2 m_0^2 m_2^3}{2L_2^2} - \frac{G^2 m_0 m_1 m_2^3}{L_2^2} \sum_{exp(i)} A_{exp(i)} E_1^{exp(1)} E_2^{exp(2)} da^{exp(3)} \cos \Phi.$$

où  $E_i = \sqrt{2P_i/L_i}$  et  $da = \alpha - \alpha_0$  est fonction de  $L_1$  et  $L_2$ .

Nous pouvons à présent écrire les équations hamiltoniennes associées :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= \frac{\partial H}{\partial L_i} = \frac{\partial H}{\partial E_i} \frac{\partial E_i}{\partial L_i} + \frac{\partial H}{\partial da} \frac{\partial da}{\partial L_i}, \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{\partial H}{\partial E_i} \frac{\partial E_i}{\partial P_i}, \\ \dot{L}_i &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

Notons que dans nos applications, l'Hamiltonien sera considéré jusqu'à l'ordre 12 dans les variables polynomiales.

### 5.3 Résultats

Nous allons maintenant tracer une série de quatre graphes pour chacun des deux systèmes. Deux graphes sur les excentricités au cours du temps et deux graphes sur les demi-grands axes au cours du temps. Sur chacun de ces graphes nous tracerons trois courbes, en violet l'intégration numérique des équations de Newton en variables héliocentriques canoniques. Cette courbe violette est donc celle que nous cherchons à approximer. Nous tracerons également en bleu le résultat obtenu via un développement classique qui ne prend pas en compte la variation des demi-grands axes et en vert le résultat que nous donne le programme force-fonction. Commençons avec le système HD-108874.

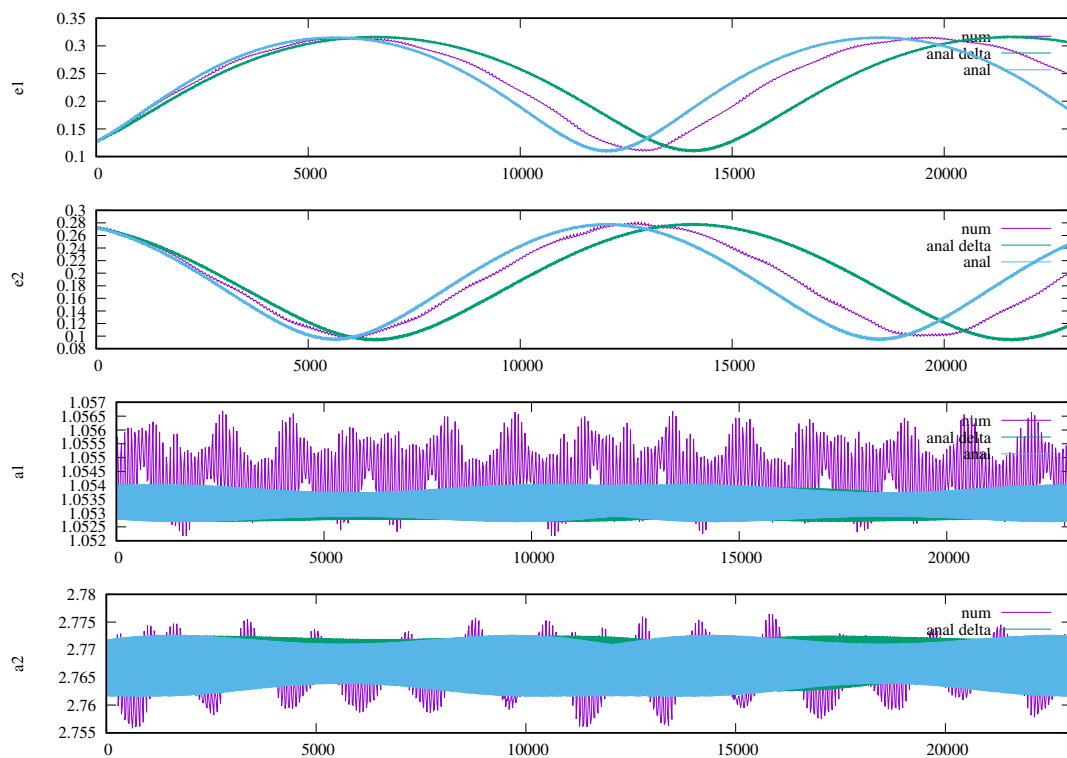


FIGURE 5.1 – HD-108874

Sur la figure 5.1 nous pouvons observer l'évolution des excentricités ( $e_1$  et  $e_2$ ) et des demi-grands axes ( $a_1$  et  $a_2$ ) sur plus de 2000 ans. Nous constatons que bien que les trois évolutions soient assez proches sur les premiers milliers d'années, les courbes diffèrent assez rapidement. Cependant, il est à noter que la différence se situe au niveau de la fréquence séculaire du système et non pas au niveau des amplitudes des différentes quantités, qui sont bien reproduites par les deux modèles analytiques. Cette figure montre clairement que la prise en compte de la variation du rapport des demi-grands axes a une influence plus que significative sur l'évolution à long terme du système. Cependant, la fréquence séculaire donnée par le nouveau développement n'est pas plus proche de celle obtenue par intégration des équations de Newton. L'amélioration est loin d'être suffisante pour approximer avec assez de précision l'intégration numérique. Il apparaît donc que prendre en compte la variation du rapport des demi-grands axes n'apporte pas de progrès significatifs, du moins pour le système HD-108874.

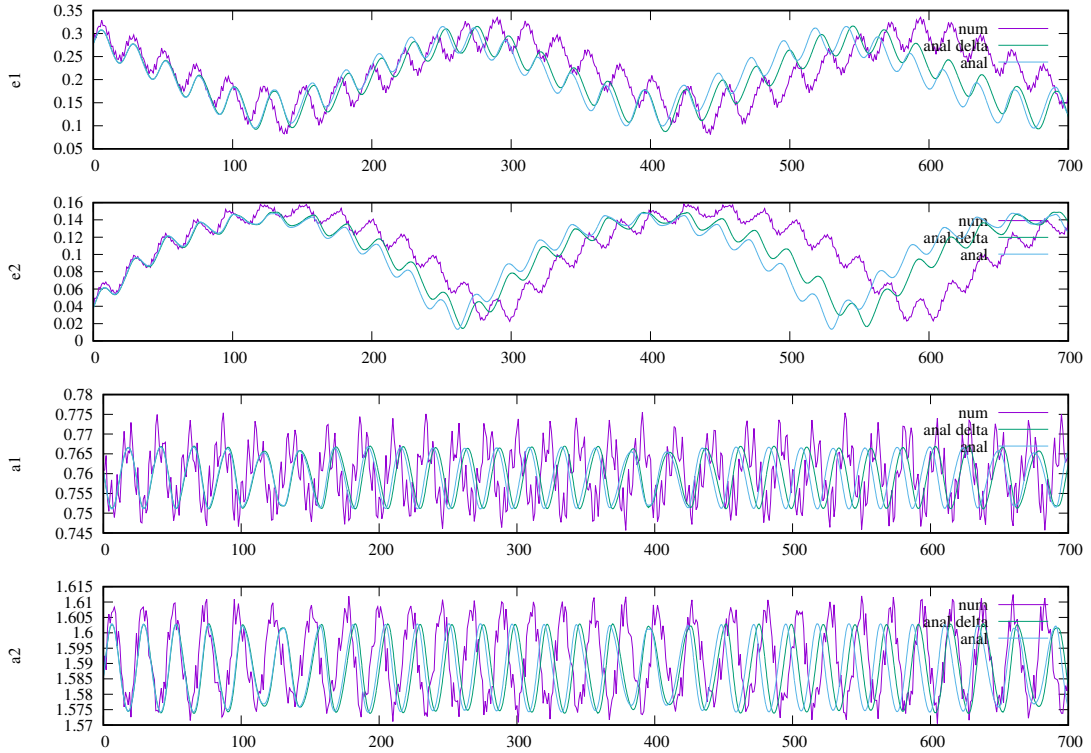


FIGURE 5.2 – HD-60532

Concernant le système HD-60532, dont les évolutions sont présentées à la figure 5.2, nos constatations sont similaires à celles du premier système. En effet, nous voyons une influence sur le long terme par rapport au développement sans la variable  $da$ . Cependant l'évolution obtenue n'approche pas significativement mieux mauve.

## 5.4 Limites du développement et perspectives

Comme nous venons de le voir, l'implémentation du développement de [Abu-El-Ata & Chapront, 1975] via le programme force-fonction influence les résultats sur le long terme. Cependant, il est évident que cette amélioration est loin d'être assez significative que pour coller exactement à l'évolution réelle du système. Notons également que nous obtenons des résultats similaires aux ordres 8 et 12 en excentricités, prouvant que le problème ne provient de la linéarisation en excentricités

Nous pouvons dégager deux pistes qui nous semblent pertinentes en vue d'améliorer ces résultats. Tout d'abord, il semble judicieux de considérer le deuxième ordre en masses comme cela a été fait dans le cas des systèmes hiérarchiques dans [Libert & Sansottera, 2013]. Ensuite nous pourrions également ne plus considérer uniquement les termes résonants mais tous les termes (c'est-à-dire également ceux des autres combinaisons angulaires que celles de la résonance concernée). Cependant cette deuxième perspective n'est pas idéale puisqu'elle implique la manipulation d'un nombre très important de termes, ce qui va à l'encontre de l'avantage que nous avons à effectuer une approche analytique simplifiée du problème.

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons considéré l'évolution séculaire des systèmes extrasolaires en configuration résonante. Pour ce faire, nous avons étudié en détail le développement de la perturbation du problème des trois corps en série des excentricités et des inclinaisons sur bas de [Abu-El-Ata & Chapront, 1975]. La particularité de cette approche analytique est de prendre en compte la variation du rapport des demi-grands axes.

L'étape suivante a été de vérifier le code écrit par Jacques Henrard qui implémente le développement proposé par l'article. Nous avons ainsi validé chacune des parties du programme.

Enfin, dans la dernière partie du mémoire, nous avons brièvement utilisé ce code pour étudier l'évolution des systèmes extrasolaires HD-108874 et HD-60532 qui sont en résonance en moyen mouvement  $4 : 1$  et  $3 : 1$  respectivement. Les premiers résultats laissent à penser que ce développement alternatif induit une modification importante sur le comportement à long terme des systèmes planétaires. Cependant, nous n'avons pas pu dégager une amélioration significative des résultats par rapport au développement analytique ne tenant pas compte de la variation du rapport des demi-grands axes. Bien que ces approches analytiques ne reproduisent pas parfaitement l'évolution des systèmes planétaires, elle constituent néanmoins de bonnes approximations, en particulier quant à l'amplitude de variations en excentricités et en demi-grands axes. D'autres améliorations peuvent être envisagées, telle que la prise en considération du deuxième ordre des masses par exemple.



# Bibliographie

- [Abu-El-Ata & Chapront, 1975] Abu-El-Ata, N., Chapront, J. *Développement analytique de l'inverse de la distance en mécanique céleste*, Astronomy & Astrophysics 38, 57-66, 1975
- [Duriez, 2007] Duriez, L., *Mécanique céleste classique*, Laboratoire d'Astronomie de l'Université de Lille 1 et IMCCE de l'Observatoire de Paris, 22 octobre 2007; [http://lal.univ-lille1.fr/mecacel\\_duriez/CoursMCecr\\_Duriez.pdf](http://lal.univ-lille1.fr/mecacel_duriez/CoursMCecr_Duriez.pdf), consulté le 4 avril 2017
- [ESO, 2017] European Southern Observatory, [https://www.eso.org/public/archives/presskits/pdf/presskit\\_0005.pdf](https://www.eso.org/public/archives/presskits/pdf/presskit_0005.pdf), consulté le 20 mai 2018
- [Henrard, 2013] Henrard, J., *Le manipulateur de série MSNam*, mémoire de fin d'études, Université de Namur, 2013
- [Lemaitre, 2017] Lemaitre, A., *Mécanique du point et du solide*, SMATB208, Université de Namur, 2017
- [Libert, 2017] Libert A.-S., *Géométrie symplectique*, SMATB307, Université de Namur, 2017
- [Libert & Sansottera, 2013] Libert A.-S., Sansottera, M., *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* vol 117, pp. 149-168, 2013
- [Libert, 2007] Libert A.-S., *Dynamique séculaire du problème des trois corps appliqué aux systèmes extrasolaires*, thèse de doctorat, Presse Université de Namur, FUNDP, Namur, 23-29, 2007
- [Marcy et al, 2001] Marcy, Geoffrey W. et al., *A Pair of Resonant Planets Orbiting GJ 876*, The Astrophysical Journal, 2001
- [Mayor et Queloz, 1995] Mayor, M., Queloz, D., 1995. A Jupiter-mass companion to a solar-type star, Nature, 378, 355-359
- [Murray & Dermott, 1999] Murray, C.D., Dermott, S.F., *Solar System Dynamics*, Cambridge university press, Cambridge, 1999
- [Nasa Exoplanet] NASA Exoplanet exploration, *Planets beyond our solar system*, <https://exoplanets.nasa.gov>, consulté le 16 mai 2018
- [Nasa Exoplanet Archive] NASA Exoplanet Archive, NASA Exoplanet Science Institute, <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/index.html>, consulté le 26 mai 2018
- [Noyelles, 2017] Lemaitre, A., Noyelles, B., (suppléant), *Dynamique céleste et résonances*, SMATM127, Université de Namur, 2017



- [The Extrasolar Planets Encyclopaedia] *The Extrasolar Planets Encyclopaedia*, <http://exoplanet.eu>, consulté le 8 mai 2017
- [Wolszczan et Frail, 1992] Wolszczan, A., Frail, D.A., 1992. A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257+12, *Nature*, 335, 145–147



## Annexe A

# Read\_\_me du programme force-function

Notes on the program computing  
the force function of the planetary 3B problem

### Summary

We consider the force function :

$$U = a_2 \left[ \frac{1}{\Delta} - \frac{(\vec{r}_1 | \vec{r}_2)}{|\vec{r}_2|^3} \right] ,$$

where :

$\vec{r}_1$  is the position vector (as seen from the primary) of the closest body,

$\vec{r}_2$  is the position vector (as seen from the primary) of the farthest body,

$\Delta = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$  is the distance between the two bodies,

$a_1$  and  $a_2$  is the semi-major axis of, respectively, the closest and the farthest body,

The program aims at computing this function, and its derivatives with respect to the ratio of semi-major axis,  $\alpha = a_1/a_2$ , for a given numerical value of  $\alpha_0$ .

The functions are expanded in powers of the eccentricities  $e_1$  and  $e_2$ , the sinus of half inclination ( $s_1 = \sin i_1/2$  and  $s_2 = \sin i_2/2$ ), and the increment  $da = \alpha - \alpha_0$  truncated at a chosen order and produced as an even Fourier sums in the trigonometric arguments  $\lambda_1, \lambda_2, \varpi_1, \varpi_2, \Omega_1, \Omega_2$ , the two mean longitudes, the two longitude of pericenters. and two longitudes of nodes .

$$U = \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6} U_i^j(\alpha_0) e_1^{j_1} e_2^{j_2} s_1^{j_3} s_2^{j_4} da^{j_5} \cos \Theta ,$$

with  $\Theta = i_1 \lambda_1 + i_2 \lambda_2 + i_3 \varpi_1 + i_4 \varpi_2 + i_5 \Omega_1 + i_6 \Omega_2$ .

The expansion of the direct part  $a_2/\Delta$  form the bulk of the program, the indirect part is computed from

$$S = -a_2 \frac{(\vec{r}_1 | \vec{r}_2)}{|\vec{r}_2|^3} = -\alpha \frac{r_1}{a_1} \frac{a_2}{r_2} \cos(w_1 - w_2) ,$$

where  $\cos \Phi = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) / a_1 a_2$  with  $(x_i, y_i, z_i)$  the cartesian coordinates of planet  $i$ .

## The program force

This is the main program. It reads, from a file `in_force.dat`, the input :

`select` : either `all.` , `secu` , `reso` – according to the desired output (all terms, secular terms, secular orresonant terms)

`type` : either `ecce` , `cano` – according to the desired output (eccentricities  $e_i$  and sinus of half inclinations  $s_i$  of their canonical avatars  $\sqrt{2P_i/L_i}$  and  $\sqrt{2Q_i/L_i}$ ),

`sizeorder` : `.true.` if the output series should be ordered according to the size of the absolute value of the coefficients, `.false.` otherwise.

`ordinc` : `.true.` if a 3D expansion is desired, `.false.` for a planar expansion,

`ordda` : `.true.` if an expansion in the powers of  $da$  should be considered, `.false.` if not,

`ordtot` : combined order in eccentricities, sin of half inclinations and  $da$  (limited at 20).

`nl` : order in the difference in true longitudes to be considered (index  $j$  in equation 28 of Abu-El-Ata and Chapront). This is computed in case only secular or resonance terms are needed. In case when all terms are needed, this should be set to a large value (see the appendix).

$\alpha$  – the numerical value of  $\alpha_0$  ( $0 < \alpha_0 < 1$ ).

`res1` and `res2` : the integers in the resonance equation  $\alpha_0 = \text{res1}/\text{res2}$  (`res1` should be less than `res2`),

and then proceeds to compute the expansion of  $U$  the result of which is placed in a file `force_func.dat` easy to read and a file `force_func_short.dat` ready to be processed by another program.

## Computation of the inverse of the distance

The inverse of the distance  $a_2/\Delta$  is computed, according to (Abu-el-Ata and Chapront, A& A, 1975, **38**, 57-66) by :

$$\frac{a_2}{\Delta} = \Re \left\{ \left( \frac{a_2}{r_2} \right) \sum_{n_\ell \geq 0} e^{i.n_\ell(\lambda_1 - \lambda_2)} T_{n_\ell} \sum_{m \geq 0} h^m \phi_{n_d, m}^{(n_\ell)}(\alpha^2) \right\} \quad (\text{A.1})$$

(see formula 13 and 28), where

$$T_{n_\ell} = (2 - \delta_{nl}^0) \cdot \left[ \frac{r_1}{a_1} e^{i(f_1 - M_1)} \right]^{n_\ell} \cdot \left[ \frac{a_2}{r_2} e^{-i(f_2 - M_2)} \right]^{n_\ell} ; \quad h = \left( \frac{r_1}{a_1} \frac{a_2}{r_2} - 1 \right) ,$$

and

$$\phi_{n_d, m}^{(n_l)} = C_{n_d, m}^{(n_l)} \alpha^{2m+n_l} F\left(n_d + m + \frac{1}{2}, n_l + n_d + m + \frac{1}{2}, n_l + m + 1; \alpha^2\right),$$

where

$$C_{n_d, m}^{(n_l)} = \frac{\left(n_d + \frac{1}{2}\right)_{n_l} \left(n_d + \frac{1}{2}\right)_m \left(n_l + n_d + \frac{1}{2}\right)_m}{(1)_{n_l} (1)_m (n_l + 1)_m} \quad (\text{A.2})$$

$$= \frac{\Gamma\left(n_d + m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m + 1)} \frac{\Gamma\left(n_l + n_d + m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n_l + m + 1)} \left[ \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(n_d + \frac{1}{2}\right)} \right]^2, \quad (\text{A.3})$$

$F$  is the usual hypergeometric function and  $(s)_n = \Gamma(s+n)/\Gamma(s)$ , where  $\Gamma$  is the usual Gamma function. We have, for integer  $i$ ,  $\Gamma(i) = (i-1)!$  and  $\Gamma(i + \frac{1}{2}) = (2i-1)!!\sqrt{\pi}/2^i$ .

The computation of  $T_{nl}$  consists in expanding the functions  $\left[\frac{r_1}{a_1} e^{i(f_1-M_1)}\right]^{nl}$  and  $\left[\frac{a_2}{r_2} e^{-i(f_2-M_2)}\right]^{nl}$  by means of the routine `dev2B_fr` of `MSNam` and taking their product.

The computation of  $h^m$  starts by computing  $h$  by expanding  $(r_1/a_1)$  and  $(a_2/r_2)$  by means of the routine `dev2B_fr`, taking their product and subtracting 1. We then have to take the power  $m$  of it. As  $h$  is of order 1 in the eccentricities, the sum on  $m$  in formula (A.1), and thus the powers of  $h$  to compute are limited to  $m \leq \text{maximum order in eccentricities}$ .

The computation of the hypergeometric functions is performed in the subroutine `ghyp`. The same routine `cphi` is instrumental in computing the derivatives of the hypergeometric functions with respect to  $\alpha^2$  in order to form the coefficients of the powers of  $da$ .

The computation of  $(a_2/r_2)$  is performed by means of the routine `dev2B_fr`, and the various factors are multiplied.

## The Subroutine `ghyp` and its derivatives

$$\phi_{n_d, m}^{(n_l)} = C_{n_d, m}^{(n_l)} \mathcal{G},$$

with  $\mathcal{G} = \alpha^k \mathcal{F}$  where  $k = 2m + n_l$  and  $\mathcal{F} = F(n_d + m + \frac{1}{2}, n_l + n_d + m + \frac{1}{2}, n_l + m + 1; \alpha^2)$ .

The derivatives of  $\mathcal{G}$  with respect to  $\alpha$  can be expressed as the sum :

$$\frac{d^n \mathcal{G}}{d\alpha^n} = \sum_{i=0}^n A_i^n \alpha^{k+2i-n} \mathcal{F}^{(i)},$$

where  $\mathcal{F}^{(i)}$  is the  $i^{th}$  derivative of  $\mathcal{F}$  with respect to its last argument  $\alpha^2$ , and where the numerical coefficients  $A_i^n$  are computed from the recurrence :

$$\begin{aligned}
A_0^{n+1} &= (k-n)A_0^n \\
A_i^{n+1} &= 2A_{i-1}^n + (k-n+2i)A_i^n \quad \text{for } 1 \leq i \leq n \\
A_{n+1}^{n+1} &= 2A_n^n.
\end{aligned}$$

Of course the coefficients  $A_j^s$  with  $s \geq k+2j+1$  are zero as they contain a factor  $k-n-2j+2j$ . The derivatives  $\mathcal{F}^{(i)}$  are computed from the formula (page 557 – Handbook of mathematical functions, Abramowitz and Segun – Dover 1968) :

$$\mathcal{F}^{(i)} = \frac{d^i F(m_1, m_2, m_3; z)}{dz^i} = \frac{(m_1)_i (m_2)_i}{(m_3)_i} F(m_1+i, m_2+i, m_3+i; z).$$

We follow the suggestion of Abu-el-Ata and Chapront of factoring out the pole at  $\alpha = 1$  of the hypergeometric functions :

$$F(m_1+i, m_2+i, m_3+i; \alpha^2) = \frac{F(m_3-m_1, m_3-m_2, m_3+i; \alpha^2)}{(1-\alpha^2)^{m_3-m_1-m_2-i}}.$$

The values of the hypergeometric functions  $F(m_1, m_2, m_3; z)$  are computed in the subroutine `ghyp(m1,m2,m3,z,rel)` to a relative accuracy of `rel`. This relative accuracy `rel` is set at  $10^{-10}$  in the program but can be modified if need be.

Another subroutine compute the ratios of Gamma functions,  $\Gamma(m_1+1/2)/\Gamma(m_2)$ , which are needed to evaluate the coefficients (A.2) and the hypergeometric series.